PROBLEMI D'ESAME DI TEORIA DI GALOIS

A. Sia $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)$ il gruppo delle matrici invertibile due per due a coefficienti in $\mathbf{F}_5$.

1. Dimostrare che l'ordine di G è 480;
2. Dimostrare che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ genera un sottogruppo di Sylow di G e dire se si tratta di un sottogruppo normale;
3. Calcolare un p-sottogruppo di Sylow di $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ per ogni fissato numero primo p;
4. Calcolare l'ordine dell' elemento $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in G;
5. Sia B l'insieme delle matrici diagonali di G. Dimostrare che B è un sottogruppo di G e calcolarne l'ordine;
6. Dimostrare che
$$C = B \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \; | a, b \in \mathbf{F}_5^* \right\}$$
è un 2-Sylow di G e dire se è un sottogruppo normale.
7. Determinare un 3-sottogruppo di Sylow di G e dire se è normale. *Suggerimento: Dimostrare che* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_5)$ *contiene un* 3*-sottogruppo di Sylow e osservare che se* $a^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *allora* $a^2 = a^{-1}$.

B. Sia $f(t) = t^6 - 8t^3 + 15$.

1. Determinare il campo di spezzamento $\mathbf{Q}(f)$ di f;
2. Determinare tutti gli elementi di $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(f)/\mathbf{Q})$;
3. Dimostrare che $\mathbf{Q}(f)$ è un estensione di Galois di $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ e dimostrare che $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(f)/\mathbf{Q}(\sqrt{-3}))$ è isomorfo a $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$;
4. Determinare tutti i sottocampi di $\mathbf{Q}(f)$ che sono estensioni cubiche di $\mathbf{Q}$;
5. Trovare un elemento $\alpha \in \mathbf{Q}(f)$ tale che $\mathbf{Q}(f) = \mathbf{Q}(\alpha)$.