Esercizi di Teoria di Galois 1.

Roma Tre, 6 Marzo 2003

1. Sia E/F un estensione di campi e $S \subseteq E$ un sottoinsieme: Dimostrare che

$$\mathbf{Q}(F[S]) = F(S).$$

2. In ciascuno dei seguenti casi, determinare (cioè esprimere come polinomi nell'elemento che genera il campo) ove possibile l'inverso degli elementi assegnati:
   a. $\mathbf{Q}(\alpha)$ con $\alpha^3 - 5\alpha - 1 = 0$;
$$\frac{1}{\alpha+1}, \qquad \frac{1}{\alpha^2+\alpha+1} \qquad \frac{1}{2+\alpha};$$
   b. $\mathbf{Q}(\lambda)$ con $\lambda^3 - 2\lambda - 2 = 0$;
$$\frac{1}{20\lambda}, \qquad \frac{1}{\lambda+3}, \qquad \frac{1}{\lambda^5}$$
   c. $\mathbf{Q}(\xi)$ con $\xi^2 + \xi + 1 = 0$:
$$\frac{1}{a+b\xi}, \qquad a, b \in \mathbf{Q}, ab \neq 0;$$
   d. $\mathbf{F}_{13}(\zeta)$, con $\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$,
$$\frac{1}{\zeta^t}, \qquad t \in \mathbf{N}.$$

3. Determinare il polinomio minimo di μ su F in ciascuno dei seguenti casi:
   a. $E = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$, $F = \mathbf{Q}$, $\qquad \mu = \frac{1+\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$;
   b. $E = \mathbf{Q}(3^{1/4})$, $F = \mathbf{Q}$, $\qquad \mu = 3^{1/4} + 5 \cdot 3^{3/4}$;
   c. $E = \mathbf{Q}(5^{1/6})$, $F = \mathbf{Q}(5^{1/2})$, $\qquad \mu = 1 + 5^{1/6} + 3 \cdot 5^{5/6}$;
   d. $E = \mathbf{Q}(\tau)$ $(\tau^3 = 3\tau + 2)$, $F = \mathbf{Q}$, $\qquad \mu = 2\tau^2 - \tau + 2$;
   e. $E = \mathbf{F}_7(\rho)$ $(\rho^3 = \rho + 2)$, $F = \mathbf{F}_7$, $\qquad \mu = 1 + \rho$.

4. Dire quali dei seguenti insiemi sono campi e quali no giustificando la risposta.
   a. $\mathbf{Q}[x]/(x^5 + 1)$;
   b. $\mathbf{F}_5[x]/(x^2 + 1)$;
   c. $\mathbf{Z}[x]/(x^3 + x + 1)$;
   d. $\mathbf{Q}(\sqrt{3})[x]/(x^2 - 3)$;
   e. $\mathbf{Q}[\pi][X]/(X + 1)$.

5. In ciascuno dei seguenti casi calcolare $[E:F]$:
   a. $E = \mathbf{Q}(2^{1/2}, 2^{1/3}), \quad F = \mathbf{Q}$;
   b. $E = \mathbf{Q}(2^{1/2}, 2^{1/3}, 2^{1/4}, \cdots, 2^{1/20}) \quad F = \mathbf{Q}$;
   c. $E = \mathbf{Q}(\sqrt{5}, \zeta), \zeta^3 + \zeta - 1 = 0$, $F = \mathbf{Q}$ (giustificare la risposta);
   d. $E = \mathbf{F}_3[\sqrt{-1}], \quad F = \mathbf{F}_3$;
   e. $E = \mathbf{F}_5[\sqrt{-1}], \quad F = \mathbf{F}_5$;
   f. $E = \mathbf{F}_{31}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{15}, \sqrt{10}] \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_{31}(\sqrt{10})$.

6. Sia $E = \mathbf{Q}[3^{1/h}]$ dove $h \in \mathbf{N}$. Dimostrare direttamente (senza usare la teoria) che comunque scelti $a_0, a_1 \ldots, a_{h-1} \in \mathbf{Q}$ non tutti nulli, risulta

$$\frac{1}{a_0 + a_1 3^{1/h} \cdots + a_{h-1} 3^{(h-1)/h}} \in \mathbf{Q}[3^{1/h}].$$

7. Dimostrare (o dimostrare che sono sbagliate) le uguaglianze dei seguenti campi:
   a. $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{6}) = \mathbf{Q}(3\sqrt{2} - \sqrt{5} + 5\sqrt{3})$;
   b. $\mathbf{Q}(\sqrt{a^2 - 4b}) = \mathbf{Q}(\sigma), \sigma^2 + a\sigma + b = 0,\ a, b \in \mathbf{Q}$;
   c. $\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{3}) \cap \mathbf{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{-6}) = \mathbf{Q}(i)$;

8. Risolvere i problemi sulle note di Milne a pagina 23.

Alcune Risposte (Esercizi di Teoria di Galois 1. del 6/3/03):

2.
   (a. $\frac{4-\alpha^2+\alpha}{3}$, $\frac{6-\alpha^2}{5}$, $1+2\alpha-\alpha^2$),

   (b. $\frac{\gamma^2-2}{40}$, $\frac{\gamma^2-3\gamma+7}{23}$, $\frac{2-\gamma}{4}$),

   (c. $\frac{b}{b^2+ab-a^2}\xi+\frac{b-a}{b^2+ab-a^2}$),

   (d. 1 se $5|t$,
   ζ se $t \equiv 4 \bmod 5$,
   ζ^2 se $t \equiv 3 \bmod 5$,
   ζ^3 se $t \equiv 2 \bmod 5$ e
   $-1-\zeta-\zeta^2-\zeta^3$ se $t \equiv 1 \bmod 5$);

3.
   (a. $29x^2+38x+4$),

   (b. $x^4-60x^2-16428$),

   (c. $x^3-3x^2-42x+44-676\sqrt{5}$),

   (d. $x^3-19x^2+105x-200$),

   (e. x^3-3x^2+2x-2);

4. Nessuno è campo;

5.
   (a. 6),

   (b. 232792560),

   (c. 6),

   (d. 2),

   (e. 1),

   (f. 2).