**Esercizi di Teoria di Galois 2.**

Roma Tre, 17 Marzo 2003

1. Dimostrare che se $q \in \mathbf{Q}$, allora $\cos(q\pi)$ è un numero algebrico. Calcolare anche la dimensione
$$[\mathbf{Q}(\cos(q\pi)) : \mathbf{Q}]\,.$$
Si può dire la stessa cosa di $\sin(q\pi)$?
*Suggerimento: Utilizzare (senza mostrarlo) il fatto che* $[\mathbf{Q}(\zeta_m) : \mathbf{Q}] = \varphi(m)$.

2. In ciascuno dei seguenti casi, determinare la dimensione del campo di spezzamento del polinomio sul campo assegnato $F$:
   a. $f(x) = x^3$ $\quad F = \mathbf{Q}$;
   b. $f(x) = (x^2-3)(x^2-27)(x^2-12)$ $\quad F = \mathbf{Q}(3^{1/3})$;
   c. $f(x) = x^8 - 4$ $\quad F = \mathbf{Q}$;
   d. $f(x) = x^h - 3$ $\quad F = \mathbf{Q}(e^{2\pi i/h})$;
   f. $f(x) = x^3 + 30x + 1$ $\quad F = \mathbf{Q}$;
   g. $f(x) = x^{15} + 3x^5 + 1$ $\quad F = \mathbf{F}_5$;
   h. $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 1$ $\quad F = \mathbf{Q}$.
   i. $f(x) = x^{10} + x + 1$ $\quad F = \mathbf{F}_2$.

3. Descrivere gli $F$–omomorfismi di $E$ in $\mathbf{C}$ in ciascuno dei seguenti casi:
   a. $E = \mathbf{Q}(e^{\pi i/8})$ $\quad F = \mathbf{Q}(e^{\pi i/2})$;
   b. $E = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ $\quad F = \mathbf{Q}(\sqrt{6})$;
   c. $E = \mathbf{Q}(\zeta_7)$ $\quad F = \mathbf{Q}(\cos 2\pi/7)$
   d. $E = \mathbf{Q}(\sqrt{\sqrt{3}+1})$ $\quad F = \mathbf{Q}(\sqrt{3})$;
   Nel prossimo sostituire $\mathbf{C}$ con $\mathbf{F}_7(\beta)$, $\beta^4 + \beta + 1 = 0$.
   e. $E = \mathbf{F}_7(\alpha), \alpha^4 + 5\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0$ $\quad F = \mathbf{F}_7(\sqrt{-2})$.

4. In ciascuno dei seguenti numeri algebrici, si calcoli il polinomio minimo?
   a. $e^{2\pi i/33}$; b. $\cos 2\pi/9$; c. $\cos 2\pi/11$;
   d. $\cos 2\pi/13$; e. $\cos \pi/5$; f. $\sin \pi/7$.

6. Mostrare che se $f \in F[x]$ è un polinomio irriducibile e $\mathrm{char}F = p$, allora il campo di spezzamento di $f$ ha grado $\partial f$.

7. Si mostri che $\mathbf{Q}(\sqrt{-7}) \subseteq \mathbf{Q}(\zeta_7)$.
*Suggerimento: Considerare il numero* $\zeta_7 + \zeta_7^2 - \zeta_7^3 + \zeta_7^4 - \zeta_7^5 + \zeta_7^6$.

8. Mostrare che se $n \mid m$, allora $\mathbf{Q}(\zeta_n) \subset \mathbf{Q}(\zeta_m)$.

9. Risolvere i problemi sulle note di Milne a pagina 29 e 30.