Esercizi di Teoria di Galois 3.

Roma Tre, 8 Aprile 2003

1. Sia $E = \mathbf{Q}(\zeta_{13})$. Dimostrare che se $\eta = \zeta_{13} + \zeta_{13}^3 + \zeta_{13}^9$, allora il polinomio minimo f_η di η su $\mathbf{Q}$ ha grado 4. Dopo averne evidenziato le radici, mostrare (calcolando) che
$$f_\eta(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 3.$$
Qual'è la dimensione del campo di spezzamento di f_η su $\mathbf{Q}$?
Suggerimento: Usare il gruppo $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{13})/\mathbf{Q})$ *e la corrispondenza di Galois.*

2. Dimostrare $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ (dove $p > 2$ è primo) ha sempre esattamente un sottocampo quadratico. Dedurre che ogni campo ciclotomico ammette sempre un sottocampo che è un estensione quadratica di $\mathbf{Q}$.
Suggerimento: Usare il gruppo $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_p)/\mathbf{Q})$ *e la corrispondenza di Galois.*

3. (per che soffre di insonnia) Mostrare la seguente identità:
$$\sum_{j=1}^{p} \left(\frac{j}{p}\right) \zeta_p^j = \pm\sqrt{(-1)^{(p-1)/2} p}$$
(N.B. $\left(\frac{j}{p}\right)$ è il classico simbolo di Legendre). Dedurre che ogni campo quadratico è sempre contenuto in un campo ciclotomico.

4. Si descrivano tutti i campi intermedi tra E e $\mathbf{Q}$ in ciascuno dei seguenti casi:
   a. $E = \mathbf{Q}(\zeta_{16})$ b. $E = \mathbf{Q}(\zeta_{24})$
   c. $E = \mathbf{Q}_f$ il campo di spezzamento di $x^4 - 2$ d. $E = \mathbf{Q}(\zeta_{13})$
   e. $E = \mathbf{Q}_f$ il campo di spezzamento di $(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 - 5)$.
Suggerimento: Usare la corrispondenza di Galois.

5. Per ciascuno degli esercizi del punto 4. si descrivano gli elementi del gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$.

6. In cisacuno dei seguenti casi si dica se si tratta di estensioni separabili, normali o di Galois (nel qual caso descrivere il gruppo di Galois):
   i. $\mathbf{F}_7(T)/\mathbf{F}_7(T^7)$; *ii.* $\mathbf{Q}(3^{1/5})/\mathbf{Q}$;
   iii. $\mathbf{F}_{11}(T)/\mathbf{F}_{11}$; *iv.* $\mathbf{Q}(3^{1/5}, \zeta_{30})/\mathbf{Q}(\zeta_{30})$;
   v. $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, 5^{1/4})/\mathbf{Q}$; *vi.* $\mathbf{Q}(\pi, \sqrt{\pi})/\mathbf{Q}(\pi)$.

7. Mostrare che, $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{n^2})/\mathbf{Q}(\zeta_n)) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ esibendo un isomorfismo esplicito. *(Sugg: considerare $\sigma_j : \zeta_{n^2} \mapsto \zeta_{n^2}^{nj+1}$.)*

8. Risolvere i problemi sulle note di Milne a pagina 41.

9. Sia $E \subseteq \mathbf{C}$ un estensione algebrica di $\mathbf{Q}$. Mostrare che esiste un unico sottocampo $\overline{E}$ di $\mathbf{C}$ contenente Etale che:
a. $\overline{E}/\mathbf{Q}$ e di Galois;
b. $\overline{E}$ è contenuto in tutte le estensioni di Galois L di $\mathbf{Q}$ tali che $E \subseteq L \subseteq \mathbf{C}$.
Oss. $\overline{E}$ si chiama *chiusura di Galois di* E *in* $\mathbf{C}$.