Esercizi di Teoria di Galois 4.

Roma Tre, 12 Maggio 2003

1. Si calcoli il gruppo di Galois (cioè il numero di elementi e la struttura di ciascuno dei seguenti):
   a. $x^4 + 2x^3 + 15x^2 + 14x + 73$;
   b. $x^4 + 8x^3 + 26x^2 + 24x + 28$;
   c. $x^4 - 354 * x^2 + 29929$;
   d. $x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30$;
   e. $x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x - 23$;
   f. $y^4 - 13y^3 + 64y^2 - 142y + 121$;
   g. $x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 2$
   h. $X^4 + 25X^2 + 5$;
   i. $X^4 + 3X^3 + 3$
   l. $x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 3$;
   m. $x^4 + 60x^3 + 99x^2 + 60x + 1$
   n. $x^4 - 356 * x^2 + 29584$;

2. Sia $\Phi_p(x) = 1 + x + \cdots + x^{p-1}$ il polinomio ciclotomico. Mostrare che
$$\text{disc } \Phi_p(x) = (-1)^{(p-1)/2} p^{p-1}.$$

3. Mostrare che $\Phi_{p^r}(x) = \Phi_p(x^{p^{r-1}})$ e dedurne una formula per il discriminante di $\Phi_{p^r}(X)$.
4. Mostrare che se n è dispari, allora $\Psi_{2n}(x) = \Psi_n(-x)$ e che
$$\Psi_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}$$
   dove μ è la funzione di Möbius.
5. Calcolare una fomula per il discriminante di $X^n + aX + b$.
6. In ciascuno dei seguenti casi si calcoli il campo di spezzamento e il numero di campi intermedi tra il campo base e il campo di spezzamento.
   a. $(x^4 + x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1) \in \mathbf{F}_2[x]$;
   b. $(x^3 + x + 1)(x^6 + x + 1) \in \mathbf{F}_3[x]$;
   c. $(x^4 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + 1) \in \mathbf{F}_5[x]$;
   d. $(x^4 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + 1) \in \mathbf{F}_7[7]$.

7. L'obbiettivo di questo esercizio è di scoprire per passi successivi del seguente:
   Teorema. *Dato un gruppo* **abeliano** G*, esiste sempre* $f \in \mathbf{Q}[x]$ *tale che* $G \cong G_f$*.*
   i. Il famoso Teorema di Dirichlet per primi in progressione aritmentica afferma (tra l'altro) che per ogni intero m, esiste sempre un numero primo congruente a 1 modulo m. Dedurne che esiste un polinomio a coefficienti razionali il cui gruppo di Galois è isomorfo al gruppo ciclico $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$;
      Suggerimento: cercare tra i sottocampi di un opportuno campo ciclotomico.
   ii. Dimostrare f e g sono polinomi $\in \mathbf{Q}[x]$ con campi di spezzamento *linearmente disgiunti* (i.e. $\mathbf{Q}_f \cap \mathbf{Q}_f = \mathbf{Q}$) allora $G_{fg} \cong G_f \times G_f$.
      Suggerimento: Utilizzare la proprietà (studiata in classe) che
      $\mathrm{Gal}(E_1E_2/F) \cong \{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathrm{Gal}(E_1/F) \times \mathrm{Gal}(E_2/F) \mid \sigma_1|_{E_1 \cap E_2} = \sigma_2|_{E_1 \cap E_2}\}$.
   iii. Dedurre il teorema dal Teorema di classificazione dei gruppi abeliani finiti che dice che ogni gruppo abeliano è il prodotto di gruppi ciclici con ordini coprimi.

8. Mostrare che se f è un polinomio irriducibile di grado tre a coefficienti in un campo F, G_f è di tipo S_3 se e solo se F_f non contiene sottocampi quadratici.
9. Si calcoli il gruppo di Galois di $y^5 - 3 * y^2 + 1$.
9. Risolvere i problemi sulle note di Milne a pagina 51.