

COGNOME NOME MATRICOLA

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

1. Calcolare il polinomio minimo su \mathbf{Q} , di $(2 - \cos(\pi/4))^{1/3}$.
2. Mostrare che due campi di spezzamento dello stesso polinomio sono isomorfi.
3. Determinare tutti i sottocampi quadratici di $\mathbf{Q}(\zeta_{77})$.
4. Mostrare che per ogni primo p e $n \in \mathbf{N}$ esiste un unico campo finito a meno di isomorfismi.
5. Calcolare il numero di elementi del gruppo di Galois su \mathbf{Q} del polinomio $x^6 - 2$.
6. Spiegare come si fa a calcolare il gruppo di Galois di un polinomio di grado 4.
7. Costruire un'estensione F di Galois di \mathbf{Q} tale che $\text{Gal}(F/\mathbf{Q}) \simeq C_9 \times C_9$ spiegando la teoria usata.
8. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.
9. Si calcoli il numero di elementi nel campo di spezzamento del polinomio $x^9 + x^5 + x$ su \mathbf{F}_2 .
10. Dare un esempio di campo finito \mathbf{F}_{16} con 16 elementi determinando tutti i generatori del gruppo moltiplicativo \mathbf{F}_{16}^* .
11. Mostrare che i polinomi a coefficienti in un campo finito hanno gruppo di Galois ciclico.
12. Esibire (se esiste) una costruzione del numero $((2 + \sqrt{2})^{1/4} + 1)^{1/8}$.