Teoria di Galois 1 - Tutorato I

Alfonso Pesiri

Giovedì 8 Marzo 2007

Esercizio 1. In ciascuno dei seguenti casi, determinare, l'inverso degli elementi assegnati nel campo assegnato:

a. $\mathbb{Q}(\alpha)$ con $\alpha^3 - 5\alpha - 1 = 0$;

$$\alpha + 1 \qquad \alpha^2 + \alpha + 1 \qquad 2 + \alpha;$$

b. $\mathbb{Q}(\lambda)$ con $\lambda^3 - 2\lambda - 2 = 0$;

$$20\lambda \qquad \lambda + 3 \qquad \lambda^5$$

c. $\mathbb{Q}(\xi)$ con $\xi^2 + \xi + 1 = 0$:

$$a + b\xi \quad a, b \in \mathbb{Q},\ ab \neq 0;$$

d. $\mathbb{F}_{13}(\zeta)$ con $\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$,

$$\zeta^t \quad t \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 2. Determinare il polinomio minimo di μ su F in ciascuno dei seguenti casi:

a. $E = \mathbb{Q}(\sqrt{5}),\ \ F = \mathbb{Q}$ $\qquad \mu = \frac{1+\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$;

b. $E = \mathbb{Q}(\tau)$ con $\tau^3 = 3\tau + 2,\ \ F = \mathbb{Q}$ $\qquad \mu = 2\tau^2 - \tau + 2$;

c. $E = \mathbb{F}_7(\rho)$ con $\rho^3 = \rho + 2,\ \ F = \mathbb{F}_7$ $\qquad \mu = 1 + \rho$.

Esercizio 3. Dire quali dei seguenti insiemi sono campi e quali no giustificando la risposta:

a. $\mathbb{Q}[x]/(x^5+1)$;

b. $\mathbb{F}_5[x]/(x^2+1)$;

c. $\mathbb{Z}[x]/(x^3+x+1)$;

d. $\mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]/(x^2-3)$.

Esercizio 4. In ciascuno dei seguenti casi calcolare $[E:F]$:

a. $E=\mathbb{Q}(2^{1/2},2^{1/3}),\quad F=\mathbb{Q}$;

b. $E=\mathbb{Q}(\zeta_n),\quad F=\mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{n}))$;

c. $E=\mathbb{Q}(\sqrt{5},\zeta)$ dove $\zeta^3+\zeta-1=0,\quad F=\mathbb{Q}$;

d. $E=\mathbb{F}_3[\sqrt{-1}],\quad F=\mathbb{F}_3$;

e. $E=\mathbb{F}_5[\sqrt{-1}],\quad F=\mathbb{F}_5$;

f. $E=\mathbb{F}_{31}[\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{15},\sqrt{10}];\quad F=\mathbb{F}_{31}(\sqrt{10})$;

g. $E=\mathbb{Q}(\zeta_p,2^{\frac{1}{p}});\quad F=\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{p}})$;

h. $E=\mathbb{Q}(\zeta_p,2^{\frac{1}{p}});\quad F=\mathbb{Q}(\zeta_p)$.

Esercizio 5. Dimostrare (o dimostrare che sono sbagliate) le uguaglianze dei seguenti campi:

a. $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{6})=\mathbb{Q}(3\sqrt{2}-\sqrt{5}+5\sqrt{3})$;

b. $\mathbb{Q}(\sqrt{a^2-4b})=\mathbb{Q}(\sigma)$ dove $\sigma^2+a\sigma+b=0,\ a,b\in\mathbb{Q}$;

c. $\mathbb{Q}(\sqrt{-3},\sqrt{3})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{6},\sqrt{-6})=\mathbb{Q}(i)$;

d. $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Esercizio 6. In ciascuno dei seguenti casi, determinare la dimensione del campo di spezzamento del polinomio sul campo assegnato F:

a. $f(x)=x^3$ $\qquad F=\mathbb{Q}$;

b. $f(x)=(x^2-3)(x^2-27)(x^2-12)$ $\qquad F=\mathbb{Q}(3^{\frac{1}{3}})$;

c. $f(x)=x^8-4$ $\qquad F=\mathbb{Q}$;

d. $f(x)=x^h-3$ $\qquad F=\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{h}})$;

f. $f(x)=x^3+30x+1$ $\qquad F=\mathbb{Q}$;

g. $f(x) = x^{15} + 3x^5 + 1$ $\qquad F = \mathbb{F}_5$;

h. $f(x) = x^p - 2$ $\qquad F = \mathbb{Q}$;

i. $f(x) = x^{10} + x + 1$ $\qquad F = \mathbb{F}_2$.

Esercizio 7. In ciascuno dei seguenti numeri algebrici, si calcoli il polinomio minimo

a. $e^{\frac{2\pi i}{31}}$; b. $\cos\frac{\pi}{9}$; c. $\cos\frac{2\pi}{7}$;

d. $\cos\frac{2\pi}{5}$; e. $\cos\frac{\pi}{5}$; f. $\sin\frac{2\pi}{5}$.

Esercizio 8. Descrivere gli $F-$ omomorfismi di E in in ciascuno dei seguenti casi:

a. $E = \mathbb{Q}(e^{\frac{\pi i}{8}})$ $\qquad F = \mathbb{Q}(e^{\frac{\pi i}{2}})$;

b. $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ $\qquad F = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$;

c. $E = \mathbb{Q}(\zeta_7)$ $\qquad F = \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{7})$;

d. $E = \mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt{3}+1})$ $\qquad F = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$;

e. $E = \mathbb{Q}(\zeta_3, 2^{\frac{1}{3}})$ $\qquad F = \mathbb{Q}$.

Esercizio 9. Si mostri che $\mathbb{Q}(\sqrt{-7}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_7)$.
Suggerimento: Considerare il numero $\zeta_7 + \zeta_7^2 - \zeta_7^3 + \zeta_7^4 - \zeta_7^5 + \zeta_7^6$.

Esercizio 10. Mostrare che se n divide m, allora $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subset \mathbb{Q}(\zeta_m)$.

Esercizio 11. Dimostrare che se $q \in \mathbb{Q}$, allora $\cos(q\pi)$ è un numero algebrico. Calcolare anche la dimensione

$$[\mathbb{Q}(\cos(q\pi)) : \mathbb{Q}] .$$

Si può dire la stessa cosa di $\sin(q\pi)$?
Suggerimento: Utilizzare (senza mostrarlo) il fatto che $[\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$.

Esercizio 12. Ricordando che se $f \in F[x]$ è un polinomio irriducibile e char$F = p$, allora il campo di spezzamento di f ha grado ∂f, trovare il campo di spezzamento di $f(x) = x^{10} + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.