Teoria di Galois 1 - Tutorato II

Alfonso Pesiri

Giovedì 22 Marzo 2007

Esercizio 1. Descrivere gli elementi del gruppo di Galois, determinando anche tutti i sottocampi del campo di spezzamento, del polinomio $(x^2-2)(x^2+3)$

Esercizio 2. Descrivere gli elementi del gruppo di Galois del campo di spezzamento di x^n-1.

Esercizio 3. In cisacuno dei seguenti casi si dica se si tratta di estensioni separabili, normali o di Galois:

i. $\mathbb{F}_7(T)/\mathbb{F}_7(T^7)$; *ii.* $\mathbb{Q}(3^{1/5})/\mathbb{Q}$;

iii. $\mathbb{F}_{11}(T)/\mathbb{F}_{11}$; *iv.* $\mathbb{Q}(3^{1/5},\zeta_{30})/\mathbb{Q}(\zeta_{30})$;

v. $\mathbb{Q}(\sqrt{-1},5^{1/4})/\mathbb{Q}$.

Esercizio 4. Si descrivano tutti i campi intermedi tra E e $\mathbb{Q}$ in ciascuno dei seguenti casi:

a. $E=\mathbb{Q}(\zeta_n)$ con $n=7,8,13$

b. $E=\mathbb{Q}_f$ campo di spezzamento di $f(x)=x^4-2$

c. $E=\mathbb{Q}_f$ campo di spezzamento di $f(x)=(x^2-2)(x^2-3)(x^2-5)$.

Suggerimento: Usare la corrispondenza di Galois.

Esercizio 5. Per ciascuno dei punti dell'esercizio precedente si descrivano gli elementi del gruppo di Galois Gal(E/F).

Esercizio 6. Ricordando che

$$f_\alpha(x)=\prod_{\beta\in\alpha^G}(x-\beta),$$

calcolare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ nei seguenti casi:

a. $\alpha=\zeta_4+\zeta_4^2\in\mathbb{Q}(\zeta_4)$

b. $\alpha = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

c. $\alpha = \zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4$

d. $\alpha = \cos\frac{2\pi}{7}$.

Esercizio 7. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{-7}) \in \mathbb{Q}(\zeta_7)$ usando il punto (c.) dell'esercizio precedente.

Esercizio 8. Sia $E = \mathbb{Q}(\zeta_{13})$. Dimostrare che se $\eta = \zeta_{13} + \zeta_{13}^3 + \zeta_{13}^9$, allora il polinomio minimo f_η di η su $\mathbb{Q}$ ha grado 4. Dopo averne evidenziato le radici, mostrare (calcolando) che

$$f_\eta(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 3.$$

Qual'è la dimensione del campo di spezzamento di f_η su $\mathbb{Q}$?

Suggerimento: Usare il gruppo $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{13})/\mathbb{Q})$ *e la corrispondenza di Galois.*

Esercizio 9. Dimostrare $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ (dove $p > 2$ è primo) ha sempre esattamente un sottocampo quadratico. Dedurre che ogni campo ciclotomico ammette sempre un sottocampo che è un estensione quadratica di $\mathbb{Q}$.

Suggerimento: Usare il gruppo $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$ *e la corrispondenza di Galois.*

Esercizio 10 (per che soffre di insonnia). Mostrare la seguente identità:

$$\sum_{j=1}^{p} \left(\frac{j}{p}\right) \zeta_p^j = \pm\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p}$$

(N.B. $\left(\frac{j}{p}\right)$ è il classico simbolo di Legendre). Dedurre che ogni campo quadratico è sempre contenuto in un campo ciclotomico.