

# Teoria di Galois 1 - Tutorato III

Alfonso Pesiri

Giovedì 19 Aprile 2007

**Esercizio 1.** Ricordando che se  $E_1, E_2$  sono entrambe estensioni di Galois su  $\mathbb{Q}$  tali che  $E_1 \cap E_2 = \mathbb{Q}$ , si ha che  $Gal(E_1 E_2 / \mathbb{Q}) \simeq Gal(E_1 / \mathbb{Q}) \times Gal(E_2 / \mathbb{Q})$ , si calcoli il gruppo di Galois di ciascuno dei seguenti polinomi:

- a.  $(x^2 + 1)\phi_5$ ;
- b.  $x^4 - 4$ ;
- c.  $x^4 - 9x^2 + 20$ ;
- d.  $x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30$ ;
- e.  $x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 2$ ;
- f.  $x^4 - 2x^3 - 8x - 3$ ;

**Esercizio 2.** Descrivere gli elementi del gruppo di Galois del polinomio  $x^5 - 2$  mostrando che ha 20 elementi.

**Esercizio 3.** Trovare,  $\forall H$  sottogruppo del gruppo simmetrico  $S_3$ , un polinomio  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  tale che  $Gal(\mathbb{Q}_f / \mathbb{Q}) \simeq H$ .

**Esercizio 4.** Mostrare che se  $f$  è un polinomio irriducibile di grado tre a coefficienti in un campo  $F$ ,  $G_f$  è di tipo  $A_3$  se e solo se  $F_f$  non contiene sottocampi quadratici.

**Esercizio 5.** Mostrare che  $\Phi_{p^r}(x) = \Phi_p(x^{p^{r-1}})$  e dedurne una formula per il discriminante di  $\Phi_{p^r}(x)$ .

**Esercizio 6.** Sia  $\Phi_p(x) = 1 + x + \dots + x^{p-1}$  il polinomio ciclotomico. Mostrare che

$$\text{disc } \Phi_p(x) = (-1)^{(p-1)/2} p^{p-2}.$$

**Esercizio 7.** Trovare  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  tale che  $Gal(\mathbb{Q}_f / \mathbb{Q}) \simeq C_5$ .  
Si utilizzi il teorema di Dirichlet cercando  $p \equiv 1 \pmod{5}$ .