

Teoria di Galois 1 - Tutorato III

Alfonso Pesiri

Giovedì 19 Aprile 2007

Esercizio 1. Ricordando che se E_1, E_2 sono entrambe estensioni di Galois su \mathbb{Q} tali che $E_1 \cap E_2 = \mathbb{Q}$, si ha che $Gal(E_1 E_2 / \mathbb{Q}) \simeq Gal(E_1 / \mathbb{Q}) \times Gal(E_2 / \mathbb{Q})$, si calcoli il gruppo di Galois di ciascuno dei seguenti polinomi:

- a. $(x^2 + 1)\phi_5$;
- b. $x^4 - 4$;
- c. $x^4 - 9x^2 + 20$;
- d. $x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30$;
- e. $x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 2$;
- f. $x^4 - 2x^3 - 8x - 3$;

Esercizio 2. Descrivere gli elementi del gruppo di Galois del polinomio $x^5 - 2$ mostrando che ha 20 elementi.

Esercizio 3. Trovare, $\forall H$ sottogruppo del gruppo simmetrico S_3 , un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $Gal(\mathbb{Q}_f / \mathbb{Q}) \simeq H$.

Esercizio 4. Mostrare che se f è un polinomio irriducibile di grado tre a coefficienti in un campo F , G_f è di tipo A_3 se e solo se F_f non contiene sottocampi quadratici.

Esercizio 5. Mostrare che $\Phi_{p^r}(x) = \Phi_p(x^{p^{r-1}})$ e dedurne una formula per il discriminante di $\Phi_{p^r}(x)$.

Esercizio 6. Sia $\Phi_p(x) = 1 + x + \dots + x^{p-1}$ il polinomio ciclotomico. Mostrare che

$$\text{disc } \Phi_p(x) = (-1)^{(p-1)/2} p^{p-2}.$$

Esercizio 7. Trovare $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $Gal(\mathbb{Q}_f / \mathbb{Q}) \simeq C_5$.
Si utilizzi il teorema di Dirichlet cercando $p \equiv 1 \pmod{5}$.