Teoria di Galois 1 - Tutorato V

Alfonso Pesiri

Giovedì 17 Maggio 2007

Esercizio 1. Descrivere il gruppo di Galois dei seguenti polinomi:

a. $x^5 - 4x + 2$;

b. $x^4 - 2x^3 - 8x - 3$;

c. $x^5 - 3x^2 + 1$;

Esercizio 2. Dimostrare che il gruppo di Galois del polinomio (che si può assumere irriducibile) $f(x) = x^5+x^4+x^3+2x^2+3x+4$ non ha 20 elementi nè 10 mostrando che contiene un 3 ciclo *(Pensare al numero primo* 2*)*.
Cosa posso dire sulla risolubilità di tale gruppo?

Esercizio 3. Risolvere il seguente esercizio per punti, in ,aniera sequenziale:

1. Si dimostri che $\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$;

2. Si mostri che $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_{f_1} = \mathbb{Q}_{f_2}$, con $f_1(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$, ed $f_2(x) = x^4 - 10x^2 + 1$;

3. Si dica qual'è il gruppo di Galois dei due polinomi;

4. Si descrivano i due gruppi di Galois come gruppi di permutazioni (scrivere le radici esplicitamente, etichettandole con $1, 2, 3, 4$).

5. Cosa differenzia i due gruppi?

6. Meditare sul punto 5!

Esercizio 4. In ciascuno dei seguenti casi si calcoli il campo di spezzamento e il gruppo di Galois del polinomio dato:

a. $(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) \in \mathbb{F}_2[x]$;

b. $(x^3 + x + 1)(x^6 + x + 1) \in \mathbb{F}_3[x]$;

c. $(x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1) \in \mathbb{F}_2[x]$;

d. $(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^9 + x^6 + 1)(x^{27} + 2x^9 + 1) \in \mathbb{F}_3[x]$.

Si dica infine quanti e quali sono i sottocampi di ciascu campo di spezzamento.

Esercizio 5. Calcolare quanti sono i polinomi irriducibili monici di grado 7 su $\mathbb{F}_{11}$.