

# Teoria di Galois 1 - Tutorato VI

Alfonso Pesiri

Venerdì 24 Maggio 2007

**Esercizio 1.** Calcolare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi, assumendone l'irriducibilità:

a.  $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x + 11$ ;

b.  $f(x) = x^5 - 4x + 2$ ;

c.  $f(x) = (x + 3)^4 + 5$ ;

**Esercizio 2.** Elencare tutti i polinomi irriducibili di grado minore di 5 su  $\mathbb{F}_2[x]$ .

**Esercizio 3.** Quali sono le radici di  $x^{16} + x^{12} + 1$  in  $\mathbb{F}_2[\alpha]$  dove  $\alpha^4 = \alpha + 1$ ? (provare con  $\alpha^3 + 1$ )

**Esercizio 4.** Sia  $f(x) = x^5 + ax + b$ , con  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Dimostrare che  $Gal(f) \simeq D_5$  se e solo se valgono le tre seguenti:

(i)  $f$  è irriducibile su  $\mathbb{Q}$ ;

(ii)  $D(f)$  è un quadrato in  $\mathbb{Q}$ ;

(iii)  $f$  è risolubile per radicali.

**Esercizio 5.** Calcolare il gruppo di Galois del polinomio  $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3$  senza usare il metodo della risolvente cubica, ed assumendo che  $D(f) < 0$ .

**Esercizio 6.** Trovare il gruppo di Galois del polinomio  $x^6 - 5$  sia su  $\mathbb{Q}$  che su  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 7.** Sia  $G$  il gruppo di Galois del polinomio  $(x^4 - 2)(x^3 - 5)$  su  $\mathbb{Q}$ :

a. indicare un insieme di generatori per  $G$ ;

b. individuare la struttura di  $G$  come gruppo astratto.

**Esercizio 8.** Quanti campi sono strettamente contenuti tra  $\mathbb{Q}(\zeta_{12})$  e  $\mathbb{Q}(\zeta_{12}^3)$ ?

**Esercizio 9.** Determinare il gruppo di Galois del polinomio  $x^4 - 2$  su  $\mathbb{Q}$  esprimendolo anche come gruppo di permutazioni. Qual'è il numero dei sottocampi quadratici contenuti in  $\mathbb{Q}_f$ .