*COGNOME* .......................... *NOME* .......................... *MATRICOLA* ..........................

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

| FIRMA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | TOT. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ........ | | | | | | | | | | |

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

   a. È vero che il numbero $3+\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{7}+5^{1/4}}$ è costruibile?

   ..........................................................................................................................................

   b. E' vero che un qualsiasi polinomio di grado 5 con esattamente 3 radici reali ha gruppo di Galois isomorfo a $S_5$?

   ..........................................................................................................................................

   c. È vero che le estensioni finite di campi finiti sono sembre abeliane?

   ..........................................................................................................................................

   d. È vero che alcuni polinomi di grado 7 sono risolibili per radicali?

   ..........................................................................................................................................

2. Dimostrare che se $G$ è un gruppo finito con $n$ elementi e $E/F$ è un estensione di Galois tale che $\mathrm{Gal}(E/F) \cong S_n$, allora esiste un campo intermedio $M$, $F \subseteq M \subseteq E$ tale che $\mathrm{Gal}(E/M) \cong G$.

3. Calcolare il 24 esimo polinomio ciclotomico.

4. Dimostrare che $F[\alpha, \beta]/F$ è un estensione algebrica e $\beta$ è separabile su $F$, allora $F[\alpha, \beta] = F[\alpha + c\beta]$ per un opportuno $c \in F$.

5. Dimostrare che il discriminante del polinomio $x^4 + ax + b$ è $-3^3a^4 + 4^4b^3$.

6. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

7. Determinare il gruppo di Galois di $x^4 + 3x^2 + 1 \in \mathrm{Q}[X]$ e $x^4 + 3x^2 + 1 \in \mathbf{F}_2[X]$.

8. Determinare un numero algebrico il cui polinomio minimo sui razionali ha un gruppo di Galois isomorfo a $C_5 \times C_{15} \times C_{30}$.