ESERCITAZIONE DEL 9/03/2010 (2 ORE)

A. PESIRI

ESERCIZIO 1: sia ζ_m una radice m-esima dell'unità. Mostrare che l'ordine di ζ_m^k è $\frac{m}{(m,k)}$.

ESERCIZIO 2: utilizzando la relazione $\Phi_m(x) = \dfrac{x^m - 1}{\prod_{\substack{d \mid m \\ d \neq m}} \Phi_d(x)}$, calcolare $\Phi_m(x)$, con $m = 1, \dots, 8$, studiando il campo di spezzamento ad esso relativo.

ESERCIZIO 3: Mostrare che $[\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{m}) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)/2$

ESERCIZIO 4: Mostrare che $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ contiene il sottocampo quadratico $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$.

(Suggerimento: si consideri l'elemento $\eta = \sum_{j=0}^{2} \zeta_7^{3^j}$)

Più in generale, dato $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, ed $\eta = \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}-1} \zeta_p^{g^j}$, con $\langle g \rangle = \mathcal{U}(\mathbb{Z}_p)$, si dimostra che $\mathbb{Q}(\eta) = \mathbb{Q}(\sqrt{\pm p})$, a seconda che $p \equiv 1 (4)$ oppure $p \equiv 3 (4)$.

ESERCIZIO 5: Mostrare che (i) $d \mid m \Rightarrow \mathbb{Q}(\zeta_d) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_m)$

(ii) se $(m,n) = 1 \Rightarrow \mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_{m\cdot n})$