

Tutorato di TE1

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. F. Pappalardi

Tutori: Annamaria Iezzi e Dario Spirito

TUTORATO 9

13 MAGGIO 2010

1. Determinare dei campi F tali che $\text{Gal}_{\mathbb{Q}} F$ sia isomorfo a:

a) \mathbb{Z}_{13}

b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$

c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

2. Determinare se i seguenti numeri sono costruibili e, in caso affermativo, determinarne esplicitamente una costruzione:

a) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$

e) $\sqrt{\sqrt{4} - \sqrt{5}}$

i) $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

b) $-64i\sqrt{2}$

f) $\xi_{32} + \xi_{32}^{-1}$

j) $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

c) $\frac{4}{9}\sqrt{\frac{6}{7}}\sqrt{3}$

g) $\sqrt{1 + \sqrt[3]{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}}$

d) \sqrt{e}

h) ξ_{51}

k) $\text{Re}(\xi_{88}^2 + \xi_{87})$

3. Per $n \in \{4, 5, 6\}$, determinare un polinomio di grado n irriducibile su \mathbb{Q} che abbia tutte radici reali.

4. Determinare il numero di radici in \mathbb{F}_{81} dei polinomi $X^{80} - 1$, $X^{81} - 1$ e $X^{88} - 1$.

5. Fattorizzare il polinomio $X^4 + 1$ in $\mathbb{F}_5[X]$, $\mathbb{F}_{25}[X]$ e $\mathbb{F}_{125}[X]$.

6. Siano p e q numeri primi. Dimostrare che per $n \geq 1$ il numero di polinomi di grado p^n irriducibili in $\mathbb{F}_q[X]$ è

$$\frac{q^{p^n} - q^{p^{n-1}}}{p^n}$$

Dedurre il numero di fattori irriducibili del polinomio $X^{255} - 1 \in \mathbb{F}_2[X]$. Quali sono i fattori irriducibili di $X^{255} - 1 \in \mathbb{Q}[X]$?