Seminario Teoria dei Numeri 2003-2004

Matematica
Dipartimento
Università degli Studi di Roma Tor Vergata

Una panoramica sui Numeri senza fattori quadratici

Francesco Pappalardi

7 Maggio, 2004

Introduzione

Introduzione

☞ $n \in \mathbb{N}$ si dice senza fattori quadratici se $\forall$ primo $p \mid n$, $p^2 \nmid n$.

Introduzione

☞ $n \in \mathbb{N}$ si dice senza fattori quadratici se $\forall$ primo $p \mid n$, $p^2 \nmid n$.

☞ **Teorema.**

$$\boxed{\mathcal{S}(x) := \#\{n \leq x \mid n \text{ senza fattori quadratici }\} = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}).}$$

Introduzione

☞ $n \in \mathbb{N}$ si dice senza fattori quadratici se $\forall$ primo $p \mid n$, $p^2 \nmid n$.

☞ **Teorema.**

$$\mathcal{S}(x) := \#\{n \leq x \mid n \text{ senza fattori quadratici } \} = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x}).$$

☞ **Dimostrazione.** Sia μ la funzione di Möbius,

Introduzione

- $n \in \mathbb{N}$ si dice senza fattori quadratici se $\forall$ primo $p \mid n$, $p^2 \nmid n$.
- **Teorema.**

$$\boxed{\mathcal{S}(x) := \#\{n \leq x \mid n \text{ senza fattori quadratici } \} = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}).}$$

- **Dimostrazione.** Sia μ la funzione di Möbius,

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\#\text{fattori primi di } n} & \text{se } n \text{ è senza fattori quadratici} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Introduzione

- $n \in \mathbb{N}$ si dice senza fattori quadratici se $\forall$ primo $p \mid n$, $p^2 \nmid n$.
- **Teorema.**

$$\boxed{\mathcal{S}(x) := \#\{n \le x \mid n \text{ senza fattori quadratici } \} = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}).}$$

- **Dimostrazione.** Sia μ la funzione di Möbius,

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\#\text{fattori primi di } n} & \text{se } n \text{ è senza fattori quadratici} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora

$$\sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \prod_{p^2 \mid n} (1 + \mu(p)) = \mu^2(n)$$

Introduzione

- $n \in \mathbb{N}$ si dice senza fattori quadratici se $\forall$ primo $p \mid n$, $p^2 \nmid n$.
- **Teorema.**

$$\boxed{\mathcal{S}(x) := \#\{n \leq x \mid n \text{ senza fattori quadratici }\} = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}).}$$

- **Dimostrazione.** Sia μ la funzione di Möbius,

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\#\text{fattori primi di } n} & \text{se } n \text{ è senza fattori quadratici} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora

$$\sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \prod_{p^2 \mid n} (1 + \mu(p)) = \mu^2(n)$$

Quindi

Quindi

$$\sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \mu^2(n)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x) &= \sum_{n\le x} \mu^2(n) = \sum_{n\le x} \sum_{d^2\mid n} \mu(d) = \sum_{d^2\le x} \mu(d)\#\{n \le x \text{ tali che } d^2 \mid n\} \\
&= \sum_{d\le\sqrt{x}} \mu(d) \left(\frac{x}{d^2} + O(1)\right) = x \sum_{d\le\sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}) \\
&= x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\sqrt{x} + x \sum_{d>\sqrt{x}} \frac{1}{d^2}\right) \\
&= \frac{x}{\zeta(2)} + O(x^{1/2})
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{d^2\mid n}\mu(d)=\mu^2(n)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x) &= \sum_{n\le x}\mu^2(n)=\sum_{n\le x}\sum_{d^2\mid n}\mu(d)=\sum_{d^2\le x}\mu(d)\#\{n\le x \text{ tali che } d^2\mid n\}\\
&= \sum_{d\le\sqrt{x}}\mu(d)\left(\frac{x}{d^2}+O(1)\right)=x\sum_{d\le\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\sqrt{x})\\
&= x\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(\sqrt{x}+x\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{1}{d^2}\right)\\
&= \frac{x}{\zeta(2)}+O(x^{1/2})
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \mu^2(n)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x) &= \sum_{n\le x}\mu^2(n) = \sum_{n\le x}\sum_{d^2\mid n}\mu(d) = \sum_{d^2\le x}\mu(d)\#\{n\le x \text{ tali che } d^2\mid n\} \\
&= \sum_{d\le\sqrt{x}}\mu(d)\left(\frac{x}{d^2}+O(1)\right) = x\sum_{d\le\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\sqrt{x}) \\
&= x\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(\sqrt{x}+x\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{1}{d^2}\right) \\
&= \frac{x}{\zeta(2)}+O(x^{1/2})
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \mu^2(n)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x) &= \sum_{n\le x} \mu^2(n) = \sum_{n\le x}\sum_{d^2\mid n} \mu(d) = \sum_{d^2\le x} \mu(d)\#\{n \le x \text{ tali che } d^2 \mid n\} \\
&= \sum_{d\le\sqrt{x}} \mu(d)\left(\frac{x}{d^2} + O(1)\right) = x\sum_{d\le\sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}) \\
&= x\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\sqrt{x} + x\sum_{d>\sqrt{x}} \frac{1}{d^2}\right) \\
&= \frac{x}{\zeta(2)} + O(x^{1/2})
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{d^2\mid n}\mu(d)=\mu^2(n)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x) &= \sum_{n\le x}\mu^2(n)=\sum_{n\le x}\sum_{d^2\mid n}\mu(d)=\sum_{d^2\le x}\mu(d)\#\{n\le x \text{ tali che } d^2\mid n\}\\
&= \sum_{d\le\sqrt{x}}\mu(d)\left(\frac{x}{d^2}+O(1)\right)=x\sum_{d\le\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\sqrt{x})\\
&= x\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(\sqrt{x}+x\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{1}{d^2}\right)\\
&= \frac{x}{\zeta(2)}+O(x^{1/2})
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \mu^2(n)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x) &= \sum_{n \le x} \mu^2(n) = \sum_{n \le x} \sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \sum_{d^2 \le x} \mu(d) \#\{n \le x \text{ tali che } d^2 \mid n\} \\
&= \sum_{d \le \sqrt{x}} \mu(d) \left(\frac{x}{d^2} + O(1) \right) = x \sum_{d \le \sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}) \\
&= x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\sqrt{x} + x \sum_{d > \sqrt{x}} \frac{1}{d^2} \right) \\
&= \frac{x}{\zeta(2)} + O(x^{1/2})
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{d^2|n}\mu(d)=\mu^2(n)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x) &= \sum_{n\le x}\mu^2(n)=\sum_{n\le x}\sum_{d^2|n}\mu(d)=\sum_{d^2\le x}\mu(d)\#\{n\le x \text{ tali che } d^2\mid n\}\\
&= \sum_{d\le\sqrt{x}}\mu(d)\left(\frac{x}{d^2}+O(1)\right)=x\sum_{d\le\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\sqrt{x})\\
&= x\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(\sqrt{x}+x\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{1}{d^2}\right)\\
&= \frac{x}{\zeta(2)}+O(x^{1/2})
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \mu^2(n)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x) &= \sum_{n\le x} \mu^2(n) = \sum_{n\le x}\sum_{d^2\mid n} \mu(d) = \sum_{d^2\le x} \mu(d)\#\{n \le x \text{ tali che } d^2 \mid n\} \\
&= \sum_{d\le\sqrt{x}} \mu(d)\left(\frac{x}{d^2} + O(1)\right) = x\sum_{d\le\sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}) \\
&= x\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\sqrt{x} + x\sum_{d>\sqrt{x}} \frac{1}{d^2}\right) \\
&= \frac{x}{\zeta(2)} + O(x^{1/2})
\end{aligned}$$

dove ζ è la funzione zeta di Riemann.

☞ Se $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ si dice k–libero se $\forall$ primo $p \mid n$, $p^k \nmid n$. Se $\mu^{(k)}$ è la funzione caratteristica dei k–liberi, allora

☞ Se $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ si dice k–libero se $\forall$ primo $p \mid n$, $p^k \nmid n$. Se $\mu^{(k)}$ è la funzione caratteristica dei k–liberi, allora

$$\mu^{(k)}(n) = \sum_{d^k \mid n} \mu(d)$$

☞ Stessa dimostrazione:

- Se $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ si dice k–libero se $\forall$ primo $p \mid n$, $p^k \nmid n$. Se $\mu^{(k)}$ è la funzione caratteristica dei k–liberi, allora

$$\mu^{(k)}(n) = \sum_{d^k \mid n} \mu(d)$$

- Stessa dimostrazione:

$$\boxed{\mathcal{S}^k(x) := \#\{n \leq x \mid n \text{ è } k\text{–libero}\} = \frac{x}{\zeta(k)} + O(\sqrt[k]{x}).}$$

- Se $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ si dice k–libero se $\forall$ primo $p \mid n$, $p^k \nmid n$. Se $\mu^{(k)}$ è la funzione caratteristica dei k–liberi, allora

$$\mu^{(k)}(n) = \sum_{d^k \mid n} \mu(d)$$

- Stessa dimostrazione:

$$\boxed{\mathcal{S}^k(x) := \#\{n \leq x \mid n \text{ è } k\text{–libero}\} = \frac{x}{\zeta(k)} + O(\sqrt[k]{x}).}$$

- Obbiettivo: Migliorare l'errore.

- Se $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ si dice k–libero se $\forall$ primo $p \mid n$, $p^k \nmid n$. Se $\mu^{(k)}$ è la funzione caratteristica dei k–liberi, allora

$$\mu^{(k)}(n) = \sum_{d^k \mid n} \mu(d)$$

- Stessa dimostrazione:

$$\boxed{\mathcal{S}^k(x) := \#\{n \leq x \mid n \text{ è } k\text{–libero}\} = \frac{x}{\zeta(k)} + O(\sqrt[k]{x}).}$$

- Obbiettivo: Migliorare l'errore.

- $s \in \mathbb{C}$ t.c. $\Re(s) > 1$,

$$F_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^{(k)}(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{(k-1)s}}\right) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$$

- Se $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ si dice k–libero se $\forall$ primo $p \mid n$, $p^k \nmid n$. Se $\mu^{(k)}$ è la funzione caratteristica dei k–liberi, allora

$$\mu^{(k)}(n) = \sum_{d^k \mid n} \mu(d)$$

- Stessa dimostrazione:

$$\boxed{\mathcal{S}^k(x) := \#\{n \leq x \mid n \text{ è } k\text{–libero}\} = \frac{x}{\zeta(k)} + O(\sqrt[k]{x}).}$$

- Obbiettivo: Migliorare l'errore.
- $s \in \mathbb{C}$ t.c. $\Re(s) > 1$,

$$F_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^{(k)}(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{(k-1)s}}\right) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$$

- Funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli in $s = 1$ e in $s = \rho/k$ con ρ zero di ζ.

☞ Integrale di Perron

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=2}\frac{y^s}{s}ds=\begin{cases}0 & \text{se } y<1\\ 1/2 & \text{se } y=1\\ 1 & \text{se } y>1,\end{cases}$$

☞ Integrale di Perron

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=2}\frac{y^s}{s}ds = \begin{cases} 0 & \text{se } y<1 \\ 1/2 & \text{se } y=1 \\ 1 & \text{se } y>1, \end{cases}$$

☞ Se $x \notin \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^{(k)}(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$$

☞ Integrale di Perron

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=2}\frac{y^s}{s}ds = \begin{cases} 0 & \text{se } y<1 \\ 1/2 & \text{se } y=1 \\ 1 & \text{se } y>1, \end{cases}$$

☞ Se $x \notin \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^{(k)}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=2}\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}\frac{x^s}{s}ds &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\le x}\mu^{(k)}(n)\int_{\Re(s)=2}\frac{(x/n)^s}{s}ds \\ &= \mathcal{S}^k(x) \end{aligned}$$

☞ Integrale di Perron

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=2}\frac{y^s}{s}ds=\begin{cases}0 & \text{se } y<1\\ 1/2 & \text{se } y=1\\ 1 & \text{se } y>1,\end{cases}$$

☞ Se $x \notin \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^{(k)}(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=2}\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}\frac{x^s}{s}ds &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\le x}\mu^{(k)}(n)\int_{\Re(s)=2}\frac{(x/n)^s}{s}ds\\ &= \mathcal{S}^k(x)\end{aligned}$$

☞ Integrale di Perron

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=2}\frac{y^s}{s}ds=\begin{cases}0 & \text{se } y<1\\ 1/2 & \text{se } y=1\\ 1 & \text{se } y>1,\end{cases}$$

☞ Se $x\notin\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^{(k)}(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=2}\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}\frac{x^s}{s}ds &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\le x}\mu^{(k)}(n)\int_{\Re(s)=2}\frac{(x/n)^s}{s}ds\\ &= \mathcal{S}^k(x)\end{aligned}$$

☞ Integrale di Perron

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=2}\frac{y^s}{s}ds = \begin{cases} 0 & \text{se } y<1 \\ 1/2 & \text{se } y=1 \\ 1 & \text{se } y>1, \end{cases}$$

☞ Se $x \notin \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^{(k)}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=2}\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}\frac{x^s}{s}ds &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\leq x}\mu^{(k)}(n)\int_{\Re(s)=2}\frac{(x/n)^s}{s}ds \\ &= \mathcal{S}^k(x) \end{aligned}$$

☞ Integrale di Perron

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=2}\frac{y^s}{s}ds = \begin{cases} 0 & \text{se } y<1 \\ 1/2 & \text{se } y=1 \\ 1 & \text{se } y>1, \end{cases}$$

☞ Se $x \notin \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^{(k)}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=2}\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}\frac{x^s}{s}ds &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\le x}\mu^{(k)}(n)\int_{\Re(s)=2}\frac{(x/n)^s}{s}ds \\ &= \mathcal{S}^k(x) \end{aligned}$$

☞

$$\mathcal{S}^k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=2}\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}\frac{x^s}{s}ds$$

☞ Calcolo dei residui:

☞ Calcolo dei residui:

$$\mathcal{S}^k(x) = \frac{x}{\zeta(k)} + \sum_{\substack{\rho \\ \zeta(\rho)=0}} a_{\rho,k} x^{\rho/k}$$

dove $a_{\rho,k}$ è in funzione dei residui $1/\zeta(s)$ in $s = \rho$.

☞ Calcolo dei residui:

$$\mathcal{S}^k(x) = \frac{x}{\zeta(k)} + \sum_{\substack{\rho \\ \zeta(\rho)=0}} a_{\rho,k} x^{\rho/k}$$

dove $a_{\rho,k}$ è in funzione dei residui $1/\zeta(s)$ in $s = \rho$.

☞ Dall'Ipotesi di Riemann, $\rho = 1/2 + i\gamma$, si ha

$$\mathcal{S}^k(x) = \frac{x}{\zeta(k)} + O(x^{1/2k} \sum_{\gamma} a_{\rho,k} x^{i\gamma/k})$$

☞ Calcolo dei residui:

$$\mathcal{S}^k(x) = \frac{x}{\zeta(k)} + \sum_{\substack{\rho \\ \zeta(\rho)=0}} a_{\rho,k} x^{\rho/k}$$

dove $a_{\rho,k}$ è in funzione dei residui $1/\zeta(s)$ in $s = \rho$.

☞ Dall'Ipotesi di Riemann, $\rho = 1/2 + i\gamma$, si ha

$$\mathcal{S}^k(x) = \frac{x}{\zeta(k)} + O(x^{1/2k} \sum_{\gamma} a_{\rho,k} x^{i\gamma/k})$$

☞ Congettura.

$$\boxed{\mathcal{S}^k(x) = \frac{x}{\zeta(k)} + O(x^{1/2k+\epsilon}).}$$

Storia del problema 1/3

Storia del problema 1/3

- 1968 – Vaidya.
-
-
-
-

Storia del problema 1/3

- 1968 – Vaidya.

$$R_k(x) := \mathcal{S}^k(x) - \frac{x}{\zeta(k)} = \Omega(\sqrt[2k]{x})$$

Storia del problema 1/3

- 1968 – Vaidya.

$$R_k(x) := \mathcal{S}^k(x) - \frac{x}{\zeta(k)} = \Omega(\sqrt[2k]{x})$$

- 1988 – Balasubramanian and Ramachandra.

Storia del problema 1/3

- 1968 – Vaidya.

$$R_k(x) := \mathcal{S}^k(x) - \frac{x}{\zeta(k)} = \Omega(\sqrt[2k]{x})$$

- 1988 – Balasubramanian and Ramachandra.

$$R_2(x) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x})$$

Storia del problema 1/3

- 1968 – Vaidya.

$$R_k(x) := \mathcal{S}^k(x) - \frac{x}{\zeta(k)} = \Omega(\sqrt[2k]{x})$$

- 1988 – Balasubramanian and Ramachandra.

$$R_2(x) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x})$$

- 1963 – Walfisz. $\exists c > 0,$

Storia del problema 1/3

- 1968 – Vaidya.

$$R_k(x) := \mathcal{S}^k(x) - \frac{x}{\zeta(k)} = \Omega(\sqrt[2k]{x})$$

- 1988 – Balasubramanian and Ramachandra.

$$R_2(x) = \Omega_\pm(\sqrt{x})$$

- 1963 – Walfisz. $\exists c > 0,$

$$R_k(x) \ll \sqrt{x}\exp\{-ck^{-8/5}\log^{3/5}x\log\log^{1/5}x\}$$

-
-

Storia del problema 1/3

- 1968 – Vaidya.

$$R_k(x) := \mathcal{S}^k(x) - \frac{x}{\zeta(k)} = \Omega(\sqrt[2k]{x})$$

- 1988 – Balasubramanian and Ramachandra.

$$R_2(x) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x})$$

- 1963 – Walfisz. $\exists c > 0,$

$$R_k(x) \ll \sqrt{x}\exp\{-ck^{-8/5}\log^{3/5} x \log\log^{1/5} x\}$$

Da ora si assume *RH*

-

-

Storia del problema 1/3

- 1968 – Vaidya.

$$R_k(x) := \mathcal{S}^k(x) - \frac{x}{\zeta(k)} = \Omega(\sqrt[2k]{x})$$

- 1988 – Balasubramanian and Ramachandra.

$$R_2(x) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x})$$

- 1963 – Walfisz. $\exists c > 0$,

$$R_k(x) \ll \sqrt{x}\exp\{-ck^{-8/5}\log^{3/5} x \log\log^{1/5} x\}$$

Da ora si assume *RH*

- 1911 – Axer. $\forall \epsilon > 0$

-

Storia del problema 1/3

- 1968 – Vaidya.

$$R_k(x) := \mathcal{S}^k(x) - \frac{x}{\zeta(k)} = \Omega(\sqrt[2k]{x})$$

- 1988 – Balasubramanian and Ramachandra.

$$R_2(x) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x})$$

- 1963 – Walfisz. $\exists c > 0$,

$$R_k(x) \ll \sqrt{x}\exp\{-ck^{-8/5}\log^{3/5} x \log\log^{1/5} x\}$$

Da ora si assume *RH*

- 1911 – Axer. $\forall \epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{2/(2k+1)+\epsilon}$$

-

Storia del problema 1/3

- 1968 – Vaidya.

$$R_k(x) := \mathcal{S}^k(x) - \frac{x}{\zeta(k)} = \Omega(\sqrt[2k]{x})$$

- 1988 – Balasubramanian and Ramachandra.

$$R_2(x) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x})$$

- 1963 – Walfisz. $\exists c > 0$,

$$R_k(x) \ll \sqrt{x}\exp\{-ck^{-8/5}\log^{3/5} x \log\log^{1/5} x\}$$

Da ora si assume *RH*

- 1911 – Axer. $\forall\epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{2/(2k+1)+\epsilon}$$

- 1981 – Montgomery e Vaughan. $\forall\epsilon > 0$

Storia del problema 1/3

- 1968 – Vaidya.

$$R_k(x) := \mathcal{S}^k(x) - \frac{x}{\zeta(k)} = \Omega(\sqrt[2k]{x})$$

- 1988 – Balasubramanian and Ramachandra.

$$R_2(x) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x})$$

- 1963 – Walfisz. $\exists c > 0$,

$$R_k(x) \ll \sqrt{x} \exp\{-ck^{-8/5} \log^{3/5} x \log\log^{1/5} x\}$$

Da ora si assume *RH*

- 1911 – Axer. $\forall \epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{2/(2k+1)+\epsilon}$$

- 1981 – Montgomery e Vaughan. $\forall \epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{1/(k+1)+\epsilon},$$

Storia del problema 1/3

- 1968 – Vaidya.

$$R_k(x) := \mathcal{S}^k(x) - \frac{x}{\zeta(k)} = \Omega(\sqrt[2k]{x})$$

- 1988 – Balasubramanian and Ramachandra.

$$R_2(x) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x})$$

- 1963 – Walfisz. $\exists c > 0$,

$$R_k(x) \ll \sqrt{x} \exp\{-ck^{-8/5} \log^{3/5} x \log\log^{1/5} x\}$$

Da ora si assume *RH*

- 1911 – Axer. $\forall \epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{2/(2k+1)+\epsilon}$$

- 1981 – Montgomery e Vaughan. $\forall \epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{1/(k+1)+\epsilon},$$

$$R_2(x) \ll x^{9/28+\epsilon}$$

Storia del problema 2/3

Storia del problema 2/3

- 1981 – Graham. $\forall\epsilon > 0$
-
-
-

Storia del problema 2/3

- 1981 – Graham. $\forall \epsilon > 0$

$$R_2(x) \ll x^{8/25+\epsilon}$$

-
-
-

Storia del problema 2/3

- 1981 – Graham. $\forall\epsilon > 0$

$$R_2(x) \ll x^{8/25+\epsilon}$$

- 1985 – Baker e Pintz (Jia 1987). $\forall\epsilon > 0$
-
-

Storia del problema 2/3

- 1981 – Graham. $\forall\epsilon > 0$

$$R_2(x) \ll x^{8/25+\epsilon}$$

- 1985 – Baker e Pintz (Jia 1987). $\forall\epsilon > 0$

$$R_2(x) \ll x^{7/22+\epsilon}$$

-
-

Storia del problema 2/3

- 1981 – Graham. $\forall\epsilon > 0$

$$R_2(x) \ll x^{8/25+\epsilon}$$

- 1985 – Baker e Pintz (Jia 1987). $\forall\epsilon > 0$

$$R_2(x) \ll x^{7/22+\epsilon}$$

- 1984 – Yao. $\forall\epsilon > 0$

-

Storia del problema 2/3

- 1981 – Graham. $\forall \epsilon > 0$

$$R_2(x) \ll x^{8/25+\epsilon}$$

- 1985 – Baker e Pintz (Jia 1987). $\forall \epsilon > 0$

$$R_2(x) \ll x^{7/22+\epsilon}$$

- 1984 – Yao. $\forall \epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{9/(9k+7)+\epsilon}$$

-

Storia del problema 2/3

- 1981 – Graham. $\forall \epsilon > 0$

$$R_2(x) \ll x^{8/25+\epsilon}$$

- 1985 – Baker e Pintz (Jia 1987). $\forall \epsilon > 0$

$$R_2(x) \ll x^{7/22+\epsilon}$$

- 1984 – Yao. $\forall \epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{9/(9k+7)+\epsilon}$$

- 1988 – Li. $\forall \epsilon > 0$

Storia del problema 2/3

- 1981 – Graham. $\forall\epsilon > 0$

$$R_2(x) \ll x^{8/25+\epsilon}$$

- 1985 – Baker e Pintz (Jia 1987). $\forall\epsilon > 0$

$$R_2(x) \ll x^{7/22+\epsilon}$$

- 1984 – Yao. $\forall\epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{9/(9k+7)+\epsilon}$$

- 1988 – Li. $\forall\epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{\max\{2/(2k+3),9/(10k+8)+\epsilon\}}$$

Storia del problema 2/3

Storia del problema 2/3

- 1989 – Graham and Pintz. $\forall \epsilon > 0$
-
-

Storia del problema 2/3

- 1989 – Graham and Pintz. $\forall\epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{D(k)+\epsilon},$$

-
-

Storia del problema 2/3

- 1989 – Graham and Pintz. $\forall\epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{D(k)+\epsilon},$$

$$\text{dove } D(k) = \begin{cases} 7/(8k+6), & \text{se } 2 \le k \le 5; \\ \frac{67}{514} & \text{se } k = 6; \\ 11(k-4)/(12k^2-37k-41) & \text{se } 7 \le k \le 12; \\ 23(k-1)/(24k^2+13k-37) & \text{se } 13 \le k \le 20 \\ \sim 2\log 2/(k+\log k) & \text{se } k \to \infty. \end{cases}$$

-
-

Storia del problema 2/3

- 1989 – Graham and Pintz. $\forall \epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{D(k)+\epsilon},$$

dove $D(k) = \begin{cases} 7/(8k+6), & \text{se } 2 \le k \le 5; \\ \frac{67}{514} & \text{se } k = 6; \\ 11(k-4)/(12k^2-37k-41) & \text{se } 7 \le k \le 12; \\ 23(k-1)/(24k^2+13k-37) & \text{se } 13 \le k \le 20 \\ \sim 2\log 2/(k+\log k) & \text{se } k \to \infty. \end{cases}$

- Miglioramenti con il metodo di Vinogradov:

-

Storia del problema 2/3

- 1989 – Graham and Pintz. $\forall \epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{D(k)+\epsilon},$$

dove
$$D(k) = \begin{cases} 7/(8k+6), & \text{se } 2 \le k \le 5; \\ \frac{67}{514} & \text{se } k = 6; \\ 11(k-4)/(12k^2-37k-41) & \text{se } 7 \le k \le 12; \\ 23(k-1)/(24k^2+13k-37) & \text{se } 13 \le k \le 20 \\ \sim 2\log 2/(k+\log k) & \text{se } k \to \infty. \end{cases}$$

- Miglioramenti con il metodo di Vinogradov:

$$R_k(x) \ll x^{1/(k+ck^{1/3})}, \quad \exists c > 0$$

-

Storia del problema 2/3

- 1989 – Graham and Pintz. $\forall\epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{D(k)+\epsilon},$$

$$\text{dove } D(k) = \begin{cases} 7/(8k+6), & \text{se } 2 \le k \le 5; \\ \frac{67}{514} & \text{se } k = 6; \\ 11(k-4)/(12k^2-37k-41) & \text{se } 7 \le k \le 12; \\ 23(k-1)/(24k^2+13k-37) & \text{se } 13 \le k \le 20 \\ \sim 2\log 2/(k+\log k) & \text{se } k \to \infty. \end{cases}$$

- Miglioramenti con il metodo di Vinogradov:

$$R_k(x) \ll x^{1/(k+ck^{1/3})}, \quad \exists c > 0$$

- 1993 – Jia. $\forall\epsilon > 0$

Storia del problema 2/3

- 1989 – Graham and Pintz. $\forall\epsilon > 0$

$$R_k(x) \ll x^{D(k)+\epsilon},$$

$$\text{dove } D(k) = \begin{cases} 7/(8k+6), & \text{se } 2 \le k \le 5; \\ \frac{67}{514} & \text{se } k = 6; \\ 11(k-4)/(12k^2-37k-41) & \text{se } 7 \le k \le 12; \\ 23(k-1)/(24k^2+13k-37) & \text{se } 13 \le k \le 20 \\ \sim 2\log 2/(k+\log k) & \text{se } k \to \infty. \end{cases}$$

- Miglioramenti con il metodo di Vinogradov:

$$R_k(x) \ll x^{1/(k+ck^{1/3})}, \quad \exists c > 0$$

- 1993 – Jia. $\forall\epsilon > 0$

$$R_2(x) \ll x^{17/54+\epsilon}$$

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 1/3

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 1/3

Se $q \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ t.c. $\gcd(a, q)$ è k–libero,

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 1/3

Se $q \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ t.c. $\gcd(a, q)$ è k–libero,

$$\boxed{\mathcal{S}_k(x; a, q) := \#\{n \leq x \mid n \ \text{ è } k\text{–libero e } n \equiv a \bmod q\}}$$

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 1/3

Se $q \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ t.c. $\gcd(a, q)$ è k–libero,

$$\boxed{\mathcal{S}_k(x; a, q) := \#\{n \le x \mid n \text{ è } k\text{–libero e } n \equiv a \bmod q\}}$$

Teorema (Prachar – 1958). *Se* $(a, q) = 1$,

$$\delta_{k,q} := \frac{1}{q\zeta(k)} \prod_{l|q} \left(1 - \frac{1}{l^k}\right).$$

Allora

$$\boxed{\mathcal{S}_k(x; a, q) = \delta_{k,q}x + O(\sqrt[k]{x}q^{-1/k^2} + q^{1/k}k^{\omega(q)}),}$$

dove $\omega(q) = \#$ *divisori primi di* q.

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 1/3

Se $q \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ t.c. $\gcd(a,q)$ è k–libero,

$$\boxed{\mathcal{S}_k(x;a,q) := \#\{n \le x \mid n \text{ è } k\text{–libero e } n \equiv a \bmod q\}}$$

Teorema (Prachar – 1958). *Se* $(a,q)=1$,

$$\delta_{k,q} := \frac{1}{q\zeta(k)} \prod_{l|q} \left(1 - \frac{1}{l^k}\right).$$

Allora

$$\boxed{\mathcal{S}_k(x;a,q) = \delta_{k,q} x + O(\sqrt[k]{x} q^{-1/k^2} + q^{1/k} k^{\omega(q)}),}$$

dove $\omega(q) = \#$ *divisori primi di* q.

Corollario *Se* $(a,q)=1$,

$$\boxed{\min\{n \ k\text{–}\mathit{libero}\ e\ n \equiv a \bmod q\} \ll q^{1+1/k+\epsilon}}$$

Dimostrazione. Partiam da

$$\mu^{(k)}(n) = \sum_{d^k \mid n} \mu(d),$$

Dimostrazione. Partiamo da $\mu^{(k)}(n) = \sum_{d^k \mid n} \mu(d),$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k(x;a,q) &= \sum_{\substack{n\le x \\ n\equiv a \bmod q}} \mu^{(k)}(n) \qquad (1) \\ &= \sum_{d\le \sqrt[k]{x}} \mu(d)\#\{m \le x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Partiamo da $\mu^{(k)}(n) = \sum_{d^k \mid n} \mu(d),$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k(x;a,q) &= \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv a \bmod q}} \mu^{(k)}(n) \qquad (1) \\ &= \sum_{d \le \sqrt[k]{x}} \mu(d) \#\{m \le x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\}. \end{aligned}$$

Adesso

$$\#\{m \le x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\} = \frac{x}{qd^k} + O(1).$$

Si divide la somma in (1) in due;

Dimostrazione. Partiamo da $\mu^{(k)}(n) = \sum_{d^k \mid n} \mu(d),$

$$\mathcal{S}_k(x;a,q) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv a \bmod q}} \mu^{(k)}(n) \tag{1}$$
$$= \sum_{d \le \sqrt[k]{x}} \mu(d) \#\{m \le x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\}.$$

Adesso

$$\#\{m \le x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\} = \frac{x}{qd^k} + O(1).$$

Si divide la somma in (1) in due;

$$\sum_{\substack{d \le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2} \\ \gcd(d,q)=1}} \quad \text{e} \quad \sum_{\sqrt[k]{x}/q^{1/k^2} < d \le \sqrt[k]{x}} .$$

☞**Prima Somma:**

$$\sum_{\substack{d\leq \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2} \\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m \leq x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\}$$

☞Prima Somma: $\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m\le x/d^k \mid d^k m\equiv a \bmod q\}$

$$\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m\le x/d^k \mid d^k m\equiv a \bmod q\} =$$

$$\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\left(\frac{x}{qd^k}+O(1)\right) =$$

$$\frac{x}{q}\sum_{\substack{d=1\\ \gcd(d,q)=1}}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^k}+O\left(\frac{x}{q}\sum_{d>\sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}}\frac{1}{d^k}+\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) =$$

$$\frac{x}{q\zeta(k)}\prod_{l|q}\left(1-\frac{1}{l^k}\right)+O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) = \delta_{k,q}x+O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right)$$

☞Prima Somma: $\displaystyle\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m \le x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\}$

$$\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m \le x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\} =$$

$$\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\left(\frac{x}{qd^k}+O(1)\right) =$$

$$\frac{x}{q}\sum_{\substack{d=1\\ \gcd(d,q)=1}}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^k}+O\left(\frac{x}{q}\sum_{d>\sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}}\frac{1}{d^k}+\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) =$$

$$\frac{x}{q\zeta(k)}\prod_{l\mid q}\left(1-\frac{1}{l^k}\right)+O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) = \delta_{k,q}x+O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right)$$

Prima Somma:

$$\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m\le x/d^k \mid d^k m\equiv a \bmod q\}$$

$$\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m\le x/d^k \mid d^k m\equiv a \bmod q\} =$$

$$\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\left(\frac{x}{qd^k}+O(1)\right) =$$

$$\frac{x}{q}\sum_{\substack{d=1\\ \gcd(d,q)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}+O\left(\frac{x}{q}\sum_{d>\sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}}\frac{1}{d^k}+\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) =$$

$$\frac{x}{q\zeta(k)}\prod_{l\mid q}\left(1-\frac{1}{l^k}\right)+O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) = \delta_{k,q}x+O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right)$$

☞Prima Somma: $\displaystyle\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m\le x/d^k \mid d^k m\equiv a \bmod q\}$

$$\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m\le x/d^k \mid d^k m\equiv a \bmod q\} =$$

$$\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\left(\frac{x}{qd^k}+O(1)\right) =$$

$$\frac{x}{q}\sum_{\substack{d=1\\ \gcd(d,q)=1}}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^k}+O\left(\frac{x}{q}\sum_{d>\sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}}\frac{1}{d^k}+\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) =$$

$$\frac{x}{q\zeta(k)}\prod_{l\mid q}\left(1-\frac{1}{l^k}\right)+O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) = \delta_{k,q}x+O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right)$$

☞**Prima Somma:** $\displaystyle\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m \le x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\}$

$$\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m \le x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\} =$$

$$\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\left(\frac{x}{qd^k} + O(1)\right) =$$

$$\frac{x}{q}\sum_{\substack{d=1\\ \gcd(d,q)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} + O\left(\frac{x}{q}\sum_{d>\sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}} \frac{1}{d^k} + \frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) =$$

$$\frac{x}{q\zeta(k)}\prod_{l\mid q}\left(1-\frac{1}{l^k}\right) + O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) = \delta_{k,q}x + O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right)$$

Prima Somma: $\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m \le x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m \le x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\} &= \\
\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\left(\frac{x}{qd^k} + O(1)\right) &= \\
\frac{x}{q}\sum_{\substack{d=1\\ \gcd(d,q)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} + O\left(\frac{x}{q}\sum_{d> \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}} \frac{1}{d^k} + \frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) &= \\
\frac{x}{q\zeta(k)}\prod_{l\mid q}\left(1-\frac{1}{l^k}\right) + O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) &= \delta_{k,q}x + O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right)
\end{aligned}$$

☞**Prima Somma:** $\displaystyle\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m \le x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m \le x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\} &= \\
\sum_{\substack{d\le \sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\left(\frac{x}{qd^k} + O(1)\right) &= \\
\frac{x}{q}\sum_{\substack{d=1\\ \gcd(d,q)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} + O\left(\frac{x}{q}\sum_{d>\sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}} \frac{1}{d^k} + \frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) &= \\
\frac{x}{q\zeta(k)}\prod_{l\mid q}\left(1-\frac{1}{l^k}\right) + O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right) &= \delta_{k,q}x + O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}\right)
\end{aligned}$$

visto che $1-(k-1)/k^2 > 1/k^2$.

☞**Seconda Somma:**

$$\sum_{\substack{\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}} < d \leq \sqrt[k]{x} \\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d) \#\{m \leq x/d^k \mid d^k m \equiv a \bmod q\}$$

☞**Seconda Somma:** $\displaystyle\sum_{\substack{\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}<d\leq\sqrt[k]{x}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m\leq x/d^k \mid d^k m\equiv a \bmod q\}$

Notare che

$$\sqrt[k]{x}/q^{1/k^2} < d \leq \sqrt[k]{x} \text{ e } nd^k \leq x \quad \Rightarrow \quad n \leq q^{1/k}.$$

☞**Seconda Somma:** $\displaystyle\sum_{\substack{\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}<d\le\sqrt[k]{x}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m\le x/d^k \mid d^k m\equiv a \bmod q\}$

Notare che

$$\sqrt[k]{x}/q^{1/k^2} < d \le \sqrt[k]{x} \text{ e } nd^k \le x \quad \Rightarrow \quad n \le q^{1/k}.$$

Quindi

$$\sum_{\substack{\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}<d\le\sqrt[k]{x}\\ \gcd(d,q)=1}} \sum_{\substack{n\le x/d^k\\ nd^k\equiv a \bmod q}} \mu(d) \ll \sum_{n\le q^{1/k}} \#\{d\le \left(\frac{x}{n}\right)^{1/k} \mid d^k n\equiv a \bmod q\}. \quad (2)$$

☞**Seconda Somma:** $\displaystyle\sum_{\substack{\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}<d\leq\sqrt[k]{x}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m\leq x/d^k \mid d^km\equiv a \bmod q\}$

Notare che

$$\sqrt[k]{x}/q^{1/k^2}<d\leq\sqrt[k]{x} \text{ e } nd^k\leq x \quad\Rightarrow\quad n\leq q^{1/k}.$$

Quindi

$$\sum_{\substack{\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}<d\leq\sqrt[k]{x}\\ \gcd(d,q)=1}}\ \sum_{\substack{n\leq x/d^k\\ nd^k\equiv a \bmod q}}\mu(d)\ll\sum_{n\leq q^{1/k}}\#\{d\leq\left(\frac{x}{n}\right)^{1/k} \mid d^kn\equiv a \bmod q\}. \quad (2)$$

La congruenza $d^kn\equiv a \bmod q$ ha al più $2k^{\omega(q)}$ soluzioni $d\in\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Quindi

$$\#\{d\leq(x/n)^{1/k} \mid d^kn\equiv a \bmod q\}\leq 2k^{\omega(q)}\left(\left(\frac{x}{n}\right)^{1/k}\frac{1}{q}+O(1)\right).$$

☞**Seconda Somma:** $\displaystyle\sum_{\substack{\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}<d\le\sqrt[k]{x}\\ \gcd(d,q)=1}} \mu(d)\#\{m\le x/d^k \mid d^k m\equiv a \bmod q\}$

Notare che

$$\sqrt[k]{x}/q^{1/k^2} < d \le \sqrt[k]{x} \text{ e } nd^k \le x \quad \Rightarrow \quad n \le q^{1/k}.$$

Quindi

$$\sum_{\substack{\frac{\sqrt[k]{x}}{q^{1/k^2}}<d\le\sqrt[k]{x}\\ \gcd(d,q)=1}} \sum_{\substack{n\le x/d^k\\ nd^k\equiv a \bmod q}} \mu(d) \ll \sum_{n\le q^{1/k}} \#\left\{d\le\left(\frac{x}{n}\right)^{1/k} \mid d^k n\equiv a \bmod q\right\}. \quad (2)$$

La congruenza $d^k n\equiv a \bmod q$ ha al più $2k^{\omega(q)}$ soluzioni $d\in\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Quindi

$$\#\{d\le(x/n)^{1/k} \mid d^k n\equiv a \bmod q\}\le 2k^{\omega(q)}\left(\left(\frac{x}{n}\right)^{1/k}\frac{1}{q}+O(1)\right).$$

Infine (2) è $O\left(k^{\omega(q)}\left(q^{1/k}+\frac{x^{1/k}}{q^{1+1/(k^2-k)}}\right)\right)$.

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 2/3

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 2/3

- 1975 – Hooley. Se $\gcd(a,q)=1$,

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 2/3

- 1975 – Hooley. Se $\gcd(a, q) = 1$,

$$\boxed{\mathcal{S}_2(x; a, q) = \delta_{2,q} x + O(\sqrt{x} q^{-1/2} + q^{1/2+\epsilon})}$$

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 2/3

✎ 1975 – Hooley. Se $\gcd(a,q)=1$,

$$\boxed{\mathcal{S}_2(x;a,q)=\delta_{2,q}x+O(\sqrt{x}q^{-1/2}+q^{1/2+\epsilon})}$$

meglio di Prachar se $x^{1/3}<q<x^{2/3-\epsilon}$.

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 2/3

✎ 1975 – Hooley. Se $\gcd(a,q)=1$,

$$\boxed{\mathcal{S}_2(x;a,q)=\delta_{2,q}x+O(\sqrt{x}q^{-1/2}+q^{1/2+\epsilon})}$$

meglio di Prachar se $x^{1/3}<q<x^{2/3-\epsilon}$.

$\forall 5/8\le\alpha<3/4\ \exists\eta=\eta(\alpha)$ t.c. se $x^{5/8}<Q\le x^{\alpha}$,

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 2/3

✎ 1975 – Hooley. Se $\gcd(a, q) = 1$,

$$\boxed{\mathcal{S}_2(x; a, q) = \delta_{2,q} x + O(\sqrt{x} q^{-1/2} + q^{1/2+\epsilon})}$$

meglio di Prachar se $x^{1/3} < q < x^{2/3-\epsilon}$.

$\forall 5/8 \leq \alpha < 3/4$ $\exists \eta = \eta(\alpha)$ t.c. se $x^{5/8} < Q \leq x^{\alpha}$,

$$\boxed{\mathcal{S}_2(x; a, q) = \delta_{2,q} x + O\left(\left(\frac{x}{q}\right)^{1-\eta}\right)}$$

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 2/3

✎ 1975 – Hooley. Se $\gcd(a,q)=1$,

$$\boxed{\mathcal{S}_2(x;a,q)=\delta_{2,q}x+O(\sqrt{x}q^{-1/2}+q^{1/2+\epsilon})}$$

meglio di Prachar se $x^{1/3}<q<x^{2/3-\epsilon}$.

$\forall 5/8\le\alpha<3/4\ \exists\eta=\eta(\alpha)$ t.c. se $x^{5/8}<Q\le x^{\alpha}$,

$$\boxed{\mathcal{S}_2(x;a,q)=\delta_{2,q}x+O\left(\left(\frac{x}{q}\right)^{1-\eta}\right)}$$

per una porzione positive dei $q\in(Q,2Q)$ con $\gcd(a,q)=1$.

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 3/3

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 3/3

✎ 1982 – McKurley. $\exists c_1, c_2$ t.c. se le L-serie associate ai caratteri reali modulo q non hanno zeri di Siegel, allora

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 3/3

✎ 1982 – McKurley. $\exists c_1, c_2$ t.c. se le L-serie associate ai caratteri reali modulo q non hanno zeri di Siegel, allora

$$\boxed{\mathcal{S}_k(x; a, q) = \delta_{k,q} x + O\left(\frac{(xq)^{1/k}}{\exp(c_1\sqrt{\log x / k^3})}\right) \text{ se } x \geq \exp(c_2 k \log^2 q).}$$

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 3/3

✎1982 – McKurley. $\exists c_1, c_2$ t.c. se le L-serie associate ai caratteri reali modulo q non hanno zeri di Siegel, allora

$$\boxed{\mathcal{S}_k(x;a,q) = \delta_{k,q}x + O\left(\frac{(xq)^{1/k}}{\exp(c_1\sqrt{\log x/k^3})}\right) \text{ se } x \geq \exp(c_2 k \log^2 q).}$$

✎1969 – Orr & Warlimont. Medie per numeri k–liberi in progressione aritmetica. $\exists A > 0$ t.c.

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 3/3

✎ 1982 – McKurley. $\exists c_1, c_2$ t.c. se le L-serie associate ai caratteri reali modulo q non hanno zeri di Siegel, allora

$$\mathcal{S}_k(x;a,q) = \delta_{k,q}x + O\left(\frac{(xq)^{1/k}}{\exp(c_1\sqrt{\log x/k^3})}\right) \text{ se } x \geq \exp(c_2 k \log^2 q).$$

✎ 1969 – Orr & Warlimont. Medie per numeri k–liberi in progressione aritmetica. $\exists A > 0$ t.c.

$$\sum_{q \leq x^{2/3}/\log^{A+1} x} \max_{\substack{a \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ \gcd(a,q) \text{ square free}}} |\mathcal{S}_2(x;a,q) - \delta_{2,a,q}x| \ll \frac{x}{\log^A x}$$

Numeri k–liberi in progressione aritmetica 3/3

✎1982 – McKurley. $\exists c_1, c_2$ t.c. se le L-serie associate ai caratteri reali modulo q non hanno zeri di Siegel, allora

$$\mathcal{S}_k(x;a,q) = \delta_{k,q}x + O\left(\frac{(xq)^{1/k}}{\exp(c_1\sqrt{\log x/k^3})}\right) \quad \text{se } x \geq \exp(c_2 k \log^2 q).$$

✎1969 – Orr & Warlimont. Medie per numeri k–liberi in progressione aritmetica. $\exists A > 0$ t.c.

$$\sum_{q \leq x^{2/3}/\log^{A+1} x} \max_{\substack{a \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ \gcd(a,q) \text{ square free}}} |\mathcal{S}_2(x;a,q) - \delta_{2,a,q}x| \ll \frac{x}{\log^A x}$$

e
$$\sum_{q \leq y} \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ \gcd(a,q) \text{ square free}}} |\mathcal{S}_2(x;a,q) - \delta_{2,a,q}x|^2 \ll xy + x^{8/5}\log^5 x$$

Il problema generale

Il problema generale

Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

Il problema generale

Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) := \#\{n \le x \text{ t.c. } \; f(n) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

Il problema generale

Sia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) := \#\{n \le x \text{ t.c. } \ f(n) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

$$\mathcal{S}_f^k(x) = \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d)\#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\}$$

Il problema generale

Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) := \#\{n \le x \text{ t.c. } \ f(n) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

$$\mathcal{S}_f^k(x) = \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d)\#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\}$$

Se $\mathbb{P}_f(D)$ è la probabilità che $f(n)$ è divisibile per $D \in \mathbb{N}$.

Il problema generale

Sia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) := \#\{n\le x \text{ t.c. } \ f(n) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

$$\mathcal{S}_f^k(x) = \sum_{d=1}^{\infty}\mu(d)\#\{n\le x \mid d^k \mid f(n)\}$$

Se $\mathbb{P}_f(D)$ è la probabilità che $f(n)$ è divisibile per $D\in\mathbb{N}$.

Problema. Studiare l'identità

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) \sim \prod_l \left(1-\mathbb{P}_f(l^k)\right)x.}$$

Variante al Problema generale

Variante al Problema generale

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) := \#\{p \le x \mid p \text{ è primo e } f(p) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

Variante al Problema generale

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) := \#\{p \le x \mid p \text{ è primo e } \ f(p) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

Teorema (Mirsky – 1949). *Per ogni $A > 0$,*

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) := \#\{p \le x \mid p \ \textit{primo},\ p + a \ \textit{è}\ k\textit{–libero}\} = \beta_a \pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)}$$

dove

$$\beta_a = \prod_{l \ \textit{primo}} \left(1 - \frac{1}{l^k(l-1)}\right).$$

Variante al Problema generale

$$\boxed{\tilde{S}_f^k(x) := \#\{p \le x \mid p \text{ è primo e } \; f(p) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

Teorema (Mirsky – 1949). *Per ogni $A > 0$,*

$$\boxed{\tilde{S}_f^k(x) := \#\{p \le x \mid p \ \mathit{primo},\, p + a \ \text{è} \ k\text{–}\mathit{libero}\} = \beta_a \pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)}$$

dove

$$\beta_a = \prod_{l \ \mathit{primo}} \left(1 - \frac{1}{l^k(l-1)}\right).$$

Lo vogliamo dimostrare con un errore più debole.

Dimostrazione. Sia $\pi(x;-a,q)$ il numero dei primi $p \leq x$, $p \equiv -a \bmod q$, usando il Teorema dei primi in progressione aritmetica:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_f^k(x) &= \sum_{p\leq x} \mu^{(k)}(p+a) = \sum_{p\leq x} \sum_{d^k|p+a} \mu(d) = \sum_{d\leq x^{1/k}} \mu(d)\pi(x;-a,d^k) \\
&= \sum_{d\leq \log x} \mu(d)\left(\frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right) + \left(\sum_{\substack{d\leq x^{1/k} \\ d>\log x}} \pi(x;-a,d^k)\right) \\
&= \beta_a \pi(x) + O\left(\sum_{d>\log x} \frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + \frac{x}{\log^2 x} + \sum_{d>\log x} \frac{x}{d^k}\right) \\
&= \beta_a \pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $\pi(x;-a,q)$ il numero dei primi $p \le x$, $p \equiv -a \bmod q$, usando il Teorema dei primi in progressione aritmetica:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) &= \sum_{p\le x} \mu^{(k)}(p+a) = \sum_{p\le x}\sum_{d^k|p+a} \mu(d) = \sum_{d\le x^{1/k}} \mu(d)\pi(x;-a,d^k) \\
&= \sum_{d\le \log x} \mu(d)\left(\frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right) + \left(\sum_{\substack{d\le x^{1/k}\\ d>\log x}} \pi(x;-a,d^k)\right) \\
&= \beta_a\pi(x) + O\left(\sum_{d>\log x}\frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + \frac{x}{\log^2 x} + \sum_{d>\log x}\frac{x}{d^k}\right) \\
&= \beta_a\pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)
\end{aligned}
$$

Dimostrazione. Sia $\pi(x;-a,q)$ il numero dei primi $p \le x$, $p \equiv -a \bmod q$, usando il Teorema dei primi in progressione aritmetica:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) &= \sum_{p\le x} \mu^{(k)}(p+a) = \sum_{p\le x}\sum_{d^k|p+a} \mu(d) = \sum_{d\le x^{1/k}} \mu(d)\pi(x;-a,d^k) \\
&= \sum_{d\le \log x} \mu(d)\left(\frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right) + \left(\sum_{\substack{d\le x^{1/k}\\ d>\log x}} \pi(x;-a,d^k)\right) \\
&= \beta_a\pi(x) + O\left(\sum_{d>\log x}\frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + \frac{x}{\log^2 x} + \sum_{d>\log x}\frac{x}{d^k}\right) \\
&= \beta_a\pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $\pi(x; -a, q)$ il numero dei primi $p \le x$, $p \equiv -a \bmod q$, usando il Teorema dei primi in progressione aritmetica:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) &= \sum_{p\le x} \mu^{(k)}(p+a) = \sum_{p\le x} \sum_{d^k|p+a} \mu(d) = \sum_{d\le x^{1/k}} \mu(d)\pi(x; -a, d^k) \\
&= \sum_{d\le \log x} \mu(d)\left(\frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right) + \left(\sum_{\substack{d\le x^{1/k} \\ d>\log x}} \pi(x; -a, d^k)\right) \\
&= \beta_a \pi(x) + O\left(\sum_{d>\log x} \frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + \frac{x}{\log^2 x} + \sum_{d>\log x} \frac{x}{d^k}\right) \\
&= \beta_a \pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $\pi(x;-a,q)$ il numero dei primi $p \le x$, $p \equiv -a \bmod q$, usando il Teorema dei primi in progressione aritmetica:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) &= \sum_{p \le x} \mu^{(k)}(p+a) = \sum_{p \le x} \sum_{d^k \mid p+a} \mu(d) = \sum_{d \le x^{1/k}} \mu(d)\pi(x;-a,d^k) \\
&= \sum_{d \le \log x} \mu(d)\left(\frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right) + \left(\sum_{\substack{d \le x^{1/k} \\ d > \log x}} \pi(x;-a,d^k)\right) \\
&= \beta_a \pi(x) + O\left(\sum_{d > \log x} \frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + \frac{x}{\log^2 x} + \sum_{d > \log x} \frac{x}{d^k}\right) \\
&= \beta_a \pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $\pi(x; -a, q)$ il numero dei primi $p \le x$, $p \equiv -a \bmod q$, usando il Teorema dei primi in progressione aritmetica:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) &= \sum_{p \le x} \mu^{(k)}(p+a) = \sum_{p \le x} \sum_{d^k \mid p+a} \mu(d) = \sum_{d \le x^{1/k}} \mu(d) \pi(x; -a, d^k) \\
&= \sum_{d \le \log x} \mu(d) \left(\frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + O\left(\frac{x}{\log^3 x} \right) \right) + \left(\sum_{\substack{d \le x^{1/k} \\ d > \log x}} \pi(x; -a, d^k) \right) \\
&= \beta_a \pi(x) + O\left(\sum_{d > \log x} \frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + \frac{x}{\log^2 x} + \sum_{d > \log x} \frac{x}{d^k} \right) \\
&= \beta_a \pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^2 x} \right)
\end{aligned}
$$

Dimostrazione. Sia $\pi(x;-a,q)$ il numero dei primi $p \le x$, $p \equiv -a \bmod q$, usando il Teorema dei primi in progressione aritmetica:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) &= \sum_{p\le x}\mu^{(k)}(p+a) = \sum_{p\le x}\sum_{d^k|p+a}\mu(d) = \sum_{d\le x^{1/k}}\mu(d)\pi(x;-a,d^k) \\
&= \sum_{d\le\log x}\mu(d)\left(\frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right) + \left(\sum_{\substack{d\le x^{1/k}\\ d>\log x}}\pi(x;-a,d^k)\right) \\
&= \beta_a\pi(x) + O\left(\sum_{d>\log x}\frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + \frac{x}{\log^2 x} + \sum_{d>\log x}\frac{x}{d^k}\right) \\
&= \beta_a\pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $\pi(x;-a,q)$ il numero dei primi $p \le x$, $p \equiv -a \bmod q$, usando il Teorema dei primi in progressione aritmetica:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) &= \sum_{p\le x} \mu^{(k)}(p+a) = \sum_{p\le x} \sum_{d^k|p+a} \mu(d) = \sum_{d\le x^{1/k}} \mu(d)\pi(x;-a,d^k) \\
&= \sum_{d\le \log x} \mu(d)\left(\frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right) + \left(\sum_{\substack{d\le x^{1/k} \\ d>\log x}} \pi(x;-a,d^k)\right) \\
&= \beta_a \pi(x) + O\left(\sum_{d>\log x} \frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + \frac{x}{\log^2 x} + \sum_{d>\log x} \frac{x}{d^k}\right) \\
&= \beta_a \pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)
\end{aligned}
$$

Dimostrazione. Sia $\pi(x;-a,q)$ il numero dei primi $p \le x$, $p \equiv -a \bmod q$, usando il Teorema dei primi in progressione aritmetica:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) &= \sum_{p\le x} \mu^{(k)}(p+a) = \sum_{p\le x} \sum_{d^k|p+a} \mu(d) = \sum_{d\le x^{1/k}} \mu(d)\pi(x;-a,d^k) \\
&= \sum_{d\le \log x} \mu(d)\left(\frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\right) + \left(\sum_{\substack{d\le x^{1/k} \\ d>\log x}} \pi(x;-a,d^k)\right) \\
&= \beta_a \pi(x) + O\left(\sum_{d>\log x} \frac{\pi(x)}{\varphi(d^k)} + \frac{x}{\log^2 x} + \sum_{d>\log x} \frac{x}{d^k}\right) \\
&= \beta_a \pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)
\end{aligned}$$

abbiamo usato la stima $\pi(x;-a,q) \ll x/q$.

Valori k-liberi di polinomi in una variabile

Valori k-liberi di polinomi in una variabile

Sia $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ i ii iii

Valori k-liberi di polinomi in una variabile

Sia $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ $\quad i$ primitivo ii $\qquad\qquad\qquad\qquad iii$

Valori k-liberi di polinomi in una variabile

Sia $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ $\quad i$ primitivo ii separabile iii

Valori k-liberi di polinomi in una variabile

Sia $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ $\quad i$ primitivo ii separabile iii $\mathrm{MCD}(f(n) \mid n \in \mathbb{N})$ è k–libero

Valori k-liberi di polinomi in una variabile

Sia $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ *i* primitivo *ii* separabile *iii* MCD$(f(n) \mid n \in \mathbb{N})$ è k–libero

evitare casi come $f(t) = t(t+1)(t+2)(t+3)$, $8 \mid f(n)\ \forall n$.

Valori k-liberi di polinomi in una variabile

Sia $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ *i* primitivo *ii* separabile *iii* MCD$(f(n) \mid n \in \mathbb{N})$ è k–libero

evitare casi come $f(t) = t(t+1)(t+2)(t+3)$, $8 \mid f(n)\ \forall n$.

Teorema (Ricci – 1933). *Sia $\varrho_f(d)$ il numero degli zeri di f in $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ e*

$$\boxed{\delta_{f,k} = \prod_{l \ \textit{primo}} \left(1 - \frac{\varrho_f(l^k)}{l^k}\right),}$$

se $\deg f \leq k$, *allora* $\forall \epsilon > 0$

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) = \#\{n \leq x \ \ t.c. \ \ f(n) \ \text{è} \ k\text{–}libero\} = x\delta_{f,k} + O\left(\frac{x}{\log^{1-\epsilon} x}\right)}$$

Valori k-liberi di polinomi in una variabile

Sia $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ *i* primitivo *ii* separabile *iii* $\mathrm{MCD}(f(n) \mid n \in \mathbb{N})$ è k–libero

evitare casi come $f(t) = t(t+1)(t+2)(t+3)$, $8 \mid f(n)\ \forall n$.

Teorema (Ricci – 1933). *Sia $\varrho_f(d)$ il numero degli zeri di f in $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ e*

$$\boxed{\delta_{f,k} = \prod_{l \ \mathit{primo}} \left(1 - \frac{\varrho_f(l^k)}{l^k}\right),}$$

se $\deg f \leq k$, *allora* $\forall \epsilon > 0$

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) = \#\{n \leq x \ \ t.c. \ \ f(n) \ \text{è} \ k\text{–}libero\} = x\delta_{f,k} + O\left(\frac{x}{\log^{1-\epsilon} x}\right)}$$

Congettura. $\mathcal{S}_f^k(x) = x\delta_{f,k}$ anche se $\deg f > k$. $\quad k = 2$ è aperto

Dimostrazione. Sia $r = \deg f$, $z = \log x$ e $P(z) = \prod_{p \leq z} p$. Si ha

Dimostrazione. Sia $r = \deg f$, $z = \log x$ e $P(z) = \prod_{p \le z} p$. Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{n \le x} \mu^{(k)}(f(n)) = \sum_{n \le x} \sum_{d^k \mid n} \mu(d) \\ &= \sum_{d \le x^{1/k}} \mu(d) \#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} \\ &= \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) \#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} + O\Big(\sum_{p > z} \#\{n \le x \mid p^k \mid f(n)\}\Big). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $r = \deg f$, $z = \log x$ e $P(z) = \prod_{p \le z} p$. Si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{n \le x} \mu^{(k)}(f(n)) = \sum_{n \le x} \sum_{d^k | n} \mu(d) \\
&= \sum_{d \le x^{1/k}} \mu(d) \# \{ n \le x \mid d^k \mid f(n) \} \\
&= \sum_{d | P(z)} \mu(d) \# \{ n \le x \mid d^k \mid f(n) \} + O\Big(\sum_{p > z} \# \{ n \le x \mid p^k \mid f(n) \}\Big).
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $r = \deg f$, $z = \log x$ e $P(z) = \prod_{p \le z} p$. Si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{n\le x} \mu^{(k)}(f(n)) = \sum_{n\le x}\sum_{d^k|n} \mu(d) \\
&= \sum_{d\le x^{1/k}} \mu(d)\#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} \\
&= \sum_{d|P(z)} \mu(d)\#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} + O\Big(\sum_{p>z}\#\{n \le x \mid p^k \mid f(n)\}\Big).
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $r = \deg f$, $z = \log x$ e $P(z) = \prod_{p \le z} p$. Si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{n \le x} \mu^{(k)}(f(n)) = \sum_{n \le x} \sum_{d^k \mid n} \mu(d) \\
&= \sum_{d \le x^{1/k}} \mu(d) \#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} \\
&= \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) \#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} + O\Big(\sum_{p > z} \#\{n \le x \mid p^k \mid f(n)\}\Big).
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $r = \deg f$, $z = \log x$ e $P(z) = \prod_{p \le z} p$. Si ha

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{n \le x} \mu^{(k)}(f(n)) = \sum_{n \le x} \sum_{d^k | n} \mu(d) \\
&= \sum_{d \le x^{1/k}} \mu(d) \#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} \\
&= \sum_{d | P(z)} \mu(d) \#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} + O\Big(\sum_{p > z} \#\{n \le x \mid p^k \mid f(n)\}\Big).
\end{aligned}
$$

Dimostrazione. Sia $r = \deg f$, $z = \log x$ e $P(z) = \prod_{p \le z} p$. Si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{n \le x} \mu^{(k)}(f(n)) = \sum_{n \le x} \sum_{d^k \mid n} \mu(d) \\
&= \sum_{d \le x^{1/k}} \mu(d) \#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} \\
&= \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) \#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} + O\Big(\sum_{p > z} \#\{n \le x \mid p^k \mid f(n)\}\Big).
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $r = \deg f$, $z = \log x$ e $P(z) = \prod_{p\le z} p$. Si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{n\le x} \mu^{(k)}(f(n)) = \sum_{n\le x} \sum_{d^k|n} \mu(d) \\
&= \sum_{d\le x^{1/k}} \mu(d)\#\{n\le x \mid d^k \mid f(n)\} \\
&= \sum_{d|P(z)} \mu(d)\#\{n\le x \mid d^k \,|\, f(n)\} + O\Big(\sum_{p>z}\#\{n\le x \,|p^k \,|\, f(n)\}\Big).
\end{aligned}$$

Notare che

$$\#\{n\le x \mid d^k \mid f(n)\} = \varrho_f(d^k)\left(\frac{x}{d^k} + O(1)\right).$$

Dimostrazione. Sia $r = \deg f$, $z = \log x$ e $P(z) = \prod_{p \le z} p$. Si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{n \le x} \mu^{(k)}(f(n)) = \sum_{n \le x} \sum_{d^k | n} \mu(d) \\
&= \sum_{d \le x^{1/k}} \mu(d) \#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} \\
&= \sum_{d | P(z)} \mu(d) \#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} + O\Big(\sum_{p > z} \#\{n \le x \mid p^k \mid f(n)\}\Big).
\end{aligned}$$

Notare che

$$\#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} = \varrho_f(d^k) \left(\frac{x}{d^k} + O(1) \right).$$

Se $p^k \mid f(n)$, allora $p \le c x^{r/k}$ per $c > 0$ opportuna e $\varrho_f(p) \le r$ è moltiplicativa.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{d|P(z)} \mu(d)\#\{n \le x \mid d^k \,|\, f(n)\} + O(\sum_{p>z} \#\{n \le x \mid p^k \,|\, f(n)\}) \\
&= \sum_{d|P(z)} \mu(d)\varrho_f(d^k) \left(\frac{x}{d^k} + O(1)\right) + O\left(\sum_{p>z} \frac{x}{p^k} + \sum_{p \le cx^{r/k}} 1\right) \\
&= x \sum_{d|P(z)} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left((1+r)^{\pi(z)} + \frac{x}{z^{k-1}\log z} + \frac{x^{r/k}}{\log x}\right) \\
&= x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left(x \sum_{d>z} \frac{r^{\omega(d)}}{d^k} + \frac{x}{\log x \log\log x}\right) \\
&= x\delta_{f,k} + O\left(\frac{x}{\log^{1-\epsilon} x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{d|P(z)} \mu(d)\#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} + O(\sum_{p>z}\#\{n \le x \mid p^k \mid f(n)\}) \\
&= \sum_{d|P(z)} \mu(d)\varrho_f(d^k)\left(\frac{x}{d^k} + O(1)\right) + O\left(\sum_{p>z}\frac{x}{p^k} + \sum_{p\le rx^{r/k}} 1\right) \\
&= x\sum_{d|P(z)} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left((1+r)^{\pi(z)} + \frac{x}{z^{k-1}\log z} + \frac{x^{r/k}}{\log x}\right) \\
&= x\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left(x\sum_{d>z}\frac{r^{\omega(d)}}{d^k} + \frac{x}{\log x \log\log x}\right) \\
&= x\delta_{f,k} + O\left(\frac{x}{\log^{1-\epsilon} x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) \#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} + O\Big(\sum_{p>z} \#\{n \le x \mid p^k \mid f(n)\}\Big) \\
&= \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) \varrho_f(d^k) \left(\frac{x}{d^k} + O(1) \right) + O\left(\sum_{p>z} \frac{x}{p^k} + \sum_{p \le c x^{r/k}} 1 \right) \\
&= x \sum_{d \mid P(z)} \frac{\mu(d) \varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left((1+r)^{\pi(z)} + \frac{x}{z^{k-1} \log z} + \frac{x^{r/k}}{\log x} \right) \\
&= x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d) \varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left(x \sum_{d>z} \frac{r^{\omega(d)}}{d^k} + \frac{x}{\log x \log\log x} \right) \\
&= x \delta_{f,k} + O\left(\frac{x}{\log^{1-\epsilon} x} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{d\mid P(z)} \mu(d)\#\{n\le x \mid d^k \mid f(n)\} + O\Big(\sum_{p>z}\#\{n\le x \mid p^k \mid f(n)\}\Big)\\
&= \sum_{d\mid P(z)} \mu(d)\varrho_f(d^k)\left(\frac{x}{d^k}+O(1)\right) + O\left(\sum_{p>z}\frac{x}{p^k} + \sum_{p\le cx^{r/k}} 1\right)\\
&= x\sum_{d\mid P(z)} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left((1+r)^{\pi(z)} + \frac{x}{z^{k-1}\log z} + \frac{x^{r/k}}{\log x}\right)\\
&= x\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left(x\sum_{d>z}\frac{r^{\omega(d)}}{d^k} + \frac{x}{\log x\log\log x}\right)\\
&= x\delta_{f,k} + O\left(\frac{x}{\log^{1-\epsilon} x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{d|P(z)} \mu(d)\#\{n \le x \mid d^k \,|\, f(n)\} + O(\sum_{p>z}\#\{n \le x \,|p^k \,|\, f(n)\}) \\
&= \sum_{d|P(z)} \mu(d)\varrho_f(d^k)\left(\frac{x}{d^k} + O(1)\right) + O\left(\sum_{p>z}\frac{x}{p^k} + \sum_{p\le cx^{r/k}} 1\right) \\
&= x\sum_{d|P(z)} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left((1+r)^{\pi(z)} + \frac{x}{z^{k-1}\log z} + \frac{x^{r/k}}{\log x}\right) \\
&= x\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left(x\sum_{d>z}\frac{r^{\omega(d)}}{d^k} + \frac{x}{\log x \log\log x}\right) \\
&= x\delta_{f,k} + O\left(\frac{x}{\log^{1-\epsilon} x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{d|P(z)} \mu(d)\#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} + O(\sum_{p>z}\#\{n \le x \mid p^k \mid f(n)\}) \\
&= \sum_{d|P(z)} \mu(d)\varrho_f(d^k)\left(\frac{x}{d^k} + O(1)\right) + O\left(\sum_{p>z}\frac{x}{p^k} + \sum_{p\le cx^{r/k}} 1\right) \\
&= x\sum_{d|P(z)} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left((1+r)^{\pi(z)} + \frac{x}{z^{k-1}\log z} + \frac{x^{r/k}}{\log x}\right) \\
&= x\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left(x\sum_{d>z}\frac{r^{\omega(d)}}{d^k} + \frac{x}{\log x \log\log x}\right) \\
&= x\delta_{f,k} + O\left(\frac{x}{\log^{1-\epsilon} x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{d\mid P(z)} \mu(d)\#\{n \le x \mid d^k \mid f(n)\} + O(\sum_{p>z}\#\{n \le x\ | p^k \mid f(n)\}) \\
&= \sum_{d\mid P(z)} \mu(d)\varrho_f(d^k)\left(\frac{x}{d^k} + O(1)\right) + O\left(\sum_{p>z}\frac{x}{p^k} + \sum_{p\le cx^{r/k}} 1\right) \\
&= x\sum_{d\mid P(z)} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left((1+r)^{\pi(z)} + \frac{x}{z^{k-1}\log z} + \frac{x^{r/k}}{\log x}\right) \\
&= x\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left(x\sum_{d>z}\frac{r^{\omega(d)}}{d^k} + \frac{x}{\log x\log\log x}\right) \\
&= x\delta_{f,k} + O\left(\frac{x}{\log^{1-\epsilon} x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_f^k(x) &= \sum_{d \mid P(z)} \mu(d)\#\{n \leq x \mid d^k \mid f(n)\} + O(\sum_{p>z} \#\{n \leq x \mid p^k \mid f(n)\}) \\
&= \sum_{d \mid P(z)} \mu(d)\varrho_f(d^k)\left(\frac{x}{d^k} + O(1)\right) + O\left(\sum_{p>z} \frac{x}{p^k} + \sum_{p \leq cx^{r/k}} 1\right) \\
&= x \sum_{d \mid P(z)} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left((1+r)^{\pi(z)} + \frac{x}{z^{k-1}\log z} + \frac{x^{r/k}}{\log x}\right) \\
&= x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)\varrho_f(d^k)}{d^k} + O\left(x \sum_{d>z} \frac{r^{\omega(d)}}{d^k} + \frac{x}{\log x \log\log x}\right) \\
&= x\delta_{f,k} + O\left(\frac{x}{\log^{1-\epsilon} x}\right)
\end{aligned}
$$

Si è usato $r^{\omega(d)} = d^{\epsilon}$.$\square$

Storia del Problema 1/2

Storia del Problema 1/2

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) := \#\{n \le x \text{ t.c. } \ f(n) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

Storia del Problema 1/2

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) := \#\{n \leq x \text{ t.c. } f(n) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

- 1953 – Erdős. Se $\deg f = k+1$, allora $\mathcal{S}_f^k(x) \to \infty$.

Storia del Problema 1/2

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) := \#\{n \le x \text{ t.c. } \ f(n) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

- 1953 – Erdős. Se $\deg f = k+1$, allora $\mathcal{S}_f^k(x) \to \infty$.
- 1976 – Hooley. Se f è irriducibile

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) = x\delta_{f,k} + O\left(\frac{x}{\log^{k/(k+2)} x}\right) \qquad \text{se } \deg f = k+1}$$

Storia del Problema 1/2

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) := \#\{n \le x \text{ t.c. } \; f(n) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

- 1953 – Erdős. Se $\deg f = k+1$, allora $\mathcal{S}_f^k(x) \to \infty$.
- 1976 – Hooley. Se f è irriducibile

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) = x\delta_{f,k} + O\left(\frac{x}{\log^{k/(k+2)} x}\right) \qquad \text{se } \deg f = k+1}$$

- 1976 – Nair. Sia $\lambda = \sqrt{2} - 1/2 = 0.9142\cdots$, f irriducibile,

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) = x\delta_{f,k} + O\left(\frac{x}{\log^{k-1} x}\right) \qquad \text{se } \deg f \ge \lambda k}$$

Storia del Problema 2/2

Storia del Problema 2/2

- 1980– Huxley, Nair. $\forall k, \deg f$, $\exists \sigma = \sigma(k, \deg f)$ t.c.

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) = x\delta_{f,k} + O\left(x^{1-\sigma}\right) \quad \text{se } k \geq \sqrt{2\deg f + 1} - (\deg f + 1)/2}$$

Storia del Problema 2/2

- 1980– Huxley, Nair. $\forall k, \deg f$, $\exists \sigma = \sigma(k, \deg f)$ t.c.

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) = x\delta_{f,k} + O\left(x^{1-\sigma}\right) \quad \text{se } k \geq \sqrt{2\deg f + 1} - (\deg f + 1)/2}$$

- 1977 – Nair. $\exists \alpha \leq 70/71$ t.c.

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) = x\delta_{f,k} + O\left(x^{\alpha}\right) \qquad \text{se } \deg f = k + 1 \geq 7}$$

Storia del Problema 2/2

✎ 1980– Huxley, Nair. $\forall k, \deg f$, $\exists \sigma = \sigma(k, \deg f)$ t.c.

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) = x\delta_{f,k} + O\left(x^{1-\sigma}\right) \quad \text{se } k \geq \sqrt{2\deg f + 1} - (\deg f + 1)/2}$$

✎ 1977 – Nair. $\exists \alpha \leq 70/71$ t.c.

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) = x\delta_{f,k} + O\left(x^{\alpha}\right) \qquad \text{se } \deg f = k + 1 \geq 7}$$

✎ 1982 – Hinz. generalizzazione del lavoro di Nair per campi numerici.

Storia del Problema 2/2

- 1980– Huxley, Nair. $\forall k, \deg f$, $\exists \sigma = \sigma(k, \deg f)$ t.c.

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) = x\delta_{f,k} + O\left(x^{1-\sigma}\right) \quad \text{se } k \geq \sqrt{2\deg f + 1} - (\deg f + 1)/2}$$

- 1977 – Nair. $\exists \alpha \leq 70/71$ t.c.

$$\boxed{\mathcal{S}_f^k(x) = x\delta_{f,k} + O\left(x^{\alpha}\right) \qquad \text{se } \deg f = k + 1 \geq 7}$$

- 1982 – Hinz. generalizzazione del lavoro di Nair per campi numerici.

- 1998 – Granville.

$$\boxed{\textbf{abc} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_f^2(x) \sim \delta_{f,2} x}$$

Valori k–liberi su argomenti primi

Valori k–liberi su argomenti primi

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) := \#\{p \le x \mid p \text{ è primo e } f(p) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

Valori k–liberi su argomenti primi

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) := \#\{p \leq x \mid p \text{ è primo e } f(p) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

- 1977 – Hooley. Se $\deg f = k+1 \geq 41$ e f è irriducibile, allora $\exists \Delta_k > 0$ t.c.

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) = \tilde{\delta}_{f,k}\pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^{1+\Delta_k} x}\right) \quad \text{se } \deg f = k+1 \geq 41}$$

Valori k–liberi su argomenti primi

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) := \#\{p \le x \mid p \text{ è primo e } f(p) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

- 1977 – Hooley. Se $\deg f = k+1 \ge 41$ e f è irriducibile, allora $\exists \Delta_k > 0$ t.c.

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) = \tilde{\delta}_{f,k}\pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^{1+\Delta_k} x}\right) \quad \text{se } \deg f = k+1 \ge 41}$$

dove $\tilde{\varrho}_f(d)$ è in numero degli zeri di $f(t)$ in $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$ e

$$\boxed{\tilde{\delta}_{f,k} = \prod_{l \text{ primo}} \left(1 - \frac{\tilde{\varrho}_f(l^k)}{l^{k-1}(l-1)}\right)}$$

Valori k–liberi su argomenti primi

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) := \#\{p \le x \mid p \text{ è primo e } \ f(p) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

- 1977 – Hooley. Se $\deg f = k+1 \ge 41$ e f è irriducibile, allora $\exists \Delta_k > 0$ t.c.

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}_f^k(x) = \tilde{\delta}_{f,k}\pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^{1+\Delta_k} x}\right) \quad \text{se } \deg f = k+1 \ge 41}$$

dove $\tilde{\varrho}_f(d)$ è in numero degli zeri di $f(t)$ in $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$ e

$$\boxed{\tilde{\delta}_{f,k} = \prod_{l \text{ primo}} \left(1 - \frac{\tilde{\varrho}_f(l^k)}{l^{k-1}(l-1)}\right)}$$

- Se $\deg f \le k$, Teorema di Ricci si estende.

valori k–liberi delle funzioni aritmetiche classiche

valori k–liberi delle funzioni aritmetiche classiche

- 2003 – Banks & FP. Se φ è la funzione di Eulero,

$$\boxed{\mathcal{S}_{\varphi}^{k}(x)=\{n\leq x \text{ t.c. } \varphi(n) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

valori k–liberi delle funzioni aritmetiche classiche

- 2003 – Banks & FP. Se φ è la funzione di Eulero,

$$\boxed{\mathcal{S}_\varphi^k(x) = \{n \le x \text{ t.c. } \varphi(n) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

Allora $\forall k \ge 3$,

$$\boxed{\mathcal{S}_\varphi^k(x) = \frac{3\alpha_k}{2(k-2)!}\,\frac{x\,(\log\log x)^{k-2}}{\log x}\left(1 + O_k\left(\frac{(\log\log\log x)^{2(k+1)^{2k-4}-1}}{(\log\log x)^{1-1/k}}\right)\right)}$$

valori k–liberi delle funzioni aritmetiche classiche

✎ 2003 – Banks & FP. Se φ è la funzione di Eulero,

$$\boxed{\mathcal{S}_\varphi^k(x) = \{n \le x \text{ t.c. } \varphi(n) \text{ è } k\text{–libero}\}.}$$

Allora $\forall k \ge 3$,

$$\boxed{\mathcal{S}_\varphi^k(x) = \frac{3\alpha_k}{2(k-2)!}\frac{x\,(\log\log x)^{k-2}}{\log x}\left(1 + O_k\left(\frac{(\log\log\log x)^{2(k+1)^{2k-4}-1}}{(\log\log x)^{1-1/k}}\right)\right)}$$

dove

$$\alpha_k := \frac{1}{2^{k-1}}\prod_{l>2}\left(1 - \frac{1}{l^{k-1}}\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-i}\binom{k-1}{i}\binom{k-1+j}{j}\frac{(l-2)^j}{(l-1)^{i+j+1}}\right).$$

La Funzione di Charmichael

La Funzione di Charmichael

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lambda(n) := \exp((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*)$$

La Funzione di Charmichael

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lambda(n) := \exp((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*)}$$

In altre parole $\lambda(p^\nu) = \begin{cases} p^{\nu-1}(p-1), & \text{se } p \geq 3 \text{ or } \nu \leq 2; \\ 2^{\nu-2}, & \text{se } p = 2 \text{ and } \nu \geq 3 \end{cases}$

La Funzione di Charmichael

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lambda(n) := \exp((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*)}$$

In altre parole $\lambda(p^\nu) = \begin{cases} p^{\nu-1}(p-1), & \text{se } p \geq 3 \text{ or } \nu \leq 2; \\ 2^{\nu-2}, & \text{se } p = 2 \text{ and } \nu \geq 3 \end{cases}$

e $\forall n \geq 2$, $\lambda(n) = \operatorname{lcm}(\lambda(p_1^{\nu_1}), \ldots, \lambda(p_s^{\nu_s}))$, dove $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_s^{\nu_s}$.

La Funzione di Charmichael

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lambda(n) := \exp((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*)$$

In altre parole $\lambda(p^\nu) = \begin{cases} p^{\nu-1}(p-1), & \text{se } p \geq 3 \text{ or } \nu \leq 2; \\ 2^{\nu-2}, & \text{se } p = 2 \text{ and } \nu \geq 3 \end{cases}$

e $\forall n \geq 2$, $\lambda(n) = \operatorname{lcm}(\lambda(p_1^{\nu_1}), \ldots, \lambda(p_s^{\nu_s}))$, dove $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_s^{\nu_s}$.

Nota. $\lambda(1) = 1$. $\forall n\ \lambda(n) \mid \varphi(n)$.

La Funzione di Charmichael

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lambda(n) := \exp((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*)}$$

In altre parole $\lambda(p^\nu) = \begin{cases} p^{\nu-1}(p-1), & \text{se } p \geq 3 \text{ or } \nu \leq 2; \\ 2^{\nu-2}, & \text{se } p = 2 \text{ and } \nu \geq 3 \end{cases}$

e $\forall n \geq 2$, $\lambda(n) = \operatorname{lcm}(\lambda(p_1^{\nu_1}), \dots, \lambda(p_s^{\nu_s}))$, dove $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_s^{\nu_s}$.

Nota. $\lambda(1) = 1$. $\forall n\ \lambda(n) \mid \varphi(n)$.

✎ 2002 FP, Saidak & Shparlinski.

$$\boxed{\mathcal{S}_\lambda^k(x) = \#\{n \leq x \text{ t.c. } \lambda(n) \text{ è } k\text{–libero}\} = (\kappa_k + o(1)) \frac{x}{\log^{1-\alpha_k} x},}$$

La Funzione di Charmichael

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lambda(n) := \exp((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*)}$$

In altre parole $\lambda(p^\nu) = \begin{cases} p^{\nu-1}(p-1), & \text{se } p \geq 3 \text{ or } \nu \leq 2; \\ 2^{\nu-2}, & \text{se } p = 2 \text{ and } \nu \geq 3 \end{cases}$

e $\forall n \geq 2$, $\lambda(n) = \text{lcm}(\lambda(p_1^{\nu_1}), \ldots, \lambda(p_s^{\nu_s}))$, dove $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_s^{\nu_s}$.

Nota. $\lambda(1) = 1$. $\forall n\ \lambda(n) \mid \varphi(n)$.

✎ 2002 FP, Saidak & Shparlinski.

$$\boxed{\mathcal{S}_\lambda^k(x) = \#\{n \leq x \text{ t.c. } \lambda(n)\ \text{ è } k\text{–libero}\} = (\kappa_k + o(1))\frac{x}{\log^{1-\alpha_k} x},}$$

dove $\kappa_k := \frac{2^{k+2}-1}{2^{k+2}-2} \cdot \frac{\eta_k}{e^{\gamma\alpha_k}\Gamma(\alpha_k)}$, $\quad \alpha_k := \prod_{l \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{l^{k-1}(l-1)}\right)$

$\eta_k := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\log^{\alpha_k} T} \prod_{\substack{l \leq T \\ l-1\ k\text{–libero}}} \log\left(1 + \frac{1}{l} + \ldots + \frac{1}{l^k}\right)$ $.k_2 = 0.80328\ldots$ $\quad$ e $\quad \alpha_2 = 0.37395\ldots$.

La Funzione “ordine”

La Funzione “ordine”

Sia $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ t.c. $(a, n) = 1$,

La Funzione “ordine”

Sia $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ t.c. $(a, n) = 1$,

$$\boxed{\mathrm{ord}_a(n) := \min\{e \in \mathbb{N} \mid a^e \equiv 1 \bmod n\}.}$$

La Funzione "ordine"

Sia $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ t.c. $(a, n) = 1$,

$$\boxed{\mathrm{ord}_a(n) := \min\{e \in \mathbb{N} \mid a^e \equiv 1 \bmod n\}.}$$

Chiaramente $\mathrm{ord}_a(n) \mid \lambda(n)$.

La Funzione "ordine"

Sia $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ t.c. $(a, n) = 1$,

$$\boxed{\boxed{\mathrm{ord}_a(n) := \min\{e \in \mathbb{N} \mid a^e \equiv 1 \bmod n\}.}}$$

Chiaramente $\mathrm{ord}_a(n) \mid \lambda(n)$.

✎ 2003 – FP.

La Funzione "ordine"

Sia $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ t.c. $(a, n) = 1$,

$$\boxed{\mathrm{ord}_a(n) := \min\{e \in \mathbb{N} \mid a^e \equiv 1 \bmod n\}.}$$

Chiaramente $\mathrm{ord}_a(n) \mid \lambda(n)$.

✎ 2003 – FP.

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathrm{ord}_a}(x) = \#\left\{ n \leq x \text{ t.c. } \begin{array}{l} (a, n) = 1, \\ \mathrm{ord}_a(n) \text{ è } k\text{–libero} \end{array} \right\} = (\iota_{a,k} + o(1)) \frac{x}{\log^{1-\beta_{a,k}} x}}$$

La Funzione "ordine"

Sia $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ t.c. $(a, n) = 1$,

$$\boxed{\boxed{\operatorname{ord}_a(n) := \min\{e \in \mathbb{N} \mid a^e \equiv 1 \bmod n\}.}}$$

Chiaramente $\operatorname{ord}_a(n) \mid \lambda(n)$.

✎ 2003 – FP.

$$\boxed{\boxed{\mathcal{S}_{\operatorname{ord}_a}(x) = \#\left\{ n \leq x \text{ t.c. } \begin{matrix} (a,n) = 1, \\ \operatorname{ord}_a(n) \text{ è } k\text{–libero} \end{matrix} \right\} = (\iota_{a,k} + o(1)) \frac{x}{\log^{1-\beta_{a,k}} x}}}$$

Se a è senza fattori quadratici e $k \geq 3$,

$$\beta_{a,k} := \left[\prod_l \left(1 - \frac{1}{l^{k-2}(l^2 - 1)} \right) \right] \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \prod_{l \mid [2,a]} \frac{1}{1 - l^{k-2}(l^2 - 1)} \right].$$

Il metodo per λ e $\mathrm{ord}_a(n)$ k–liberi

Il metodo per λ e $\mathrm{ord}_a(n)$ k–liberi

Teorema (Wirsing – 1961). *Sia* $g(n)$ *moltiplicativa,* $0 < g(p^\nu) \ll c^\nu$, $c < 2$ *e*

$$\sum_{p \le x} g(p) = (\tau + o(1))\pi(x)$$

per qualche $\tau \neq 0$. *Sia* γ *costante di Eulero,* Γ *funzione gamma. Allora*

$$\boxed{\sum_{n \le x} g(n) \sim \frac{1}{e^{\gamma\tau}\Gamma(\tau)} \frac{x}{\log x} \prod_{l \le x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g(l^\nu)}{l^\nu}.,}$$

Il metodo per λ e $\mathrm{ord}_a(n)$ k–liberi

Teorema (Wirsing – 1961). *Sia* $g(n)$ *moltiplicativa,* $0 < g(p^\nu) \ll c^\nu$, $c < 2$ *e*

$$\sum_{p\le x} g(p) = (\tau + o(1))\pi(x)$$

per qualche $\tau \neq 0$. *Sia* γ *costante di Eulero,* Γ *funzione gamma. Allora*

$$\boxed{\sum_{n\le x} g(n) \sim \frac{1}{e^{\gamma\tau}\Gamma(\tau)}\frac{x}{\log x}\prod_{l\le x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{g(l^\nu)}{l^\nu}.,}$$

$\mu^{(k)}(\lambda(n))$ e $\mu^{(k)}(\mathrm{ord}_a(n))$ sono moltiplicative!

Il metodo per λ e $\mathrm{ord}_a(n)$ k–liberi

Teorema (Wirsing – 1961). *Sia $g(n)$ moltiplicativa, $0 < g(p^\nu) \ll c^\nu$, $c < 2$ e*

$$\sum_{p \le x} g(p) = (\tau + o(1))\pi(x)$$

per qualche $\tau \neq 0$. Sia γ costante di Eulero, Γ funzione gamma. Allora

$$\boxed{\sum_{n \le x} g(n) \sim \frac{1}{e^{\gamma\tau}\Gamma(\tau)} \frac{x}{\log x} \prod_{l \le x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g(l^\nu)}{l^\nu}.,}$$

$$\mu^{(k)}(\lambda(n)) \quad \text{e} \quad \mu^{(k)}(\mathrm{ord}_a(n))$$ sono moltiplicative!

✎ Mirsky. $\forall A > 0$

Il metodo per λ e $\mathbf{ord}_a(n)$ k–liberi

Teorema (Wirsing – 1961). *Sia $g(n)$ moltiplicativa, $0 < g(p^\nu) \ll c^\nu$, $c < 2$ e*

$$\sum_{p \le x} g(p) = (\tau + o(1))\pi(x)$$

per qualche $\tau \neq 0$. Sia γ costante di Eulero, Γ funzione gamma. Allora

$$\boxed{\sum_{n \le x} g(n) \sim \frac{1}{e^{\gamma\tau}\Gamma(\tau)} \frac{x}{\log x} \prod_{l \le x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g(l^\nu)}{l^\nu}.,}$$

$$\mu^{(k)}(\lambda(n)) \quad \text{e} \quad \mu^{(k)}(\mathrm{ord}_a(n))$$ sono moltiplicative!

✎ Mirsky. $\forall A > 0$

$=$ $=$ $=$

Il metodo per λ e $\mathrm{ord}_a(n)$ k–liberi

Teorema (Wirsing – 1961). *Sia $g(n)$ moltiplicativa, $0 < g(p^\nu) \ll c^\nu$, $c < 2$ e*

$$\sum_{p\le x} g(p) = (\tau + o(1))\pi(x)$$

per qualche $\tau \neq 0$. Sia γ costante di Eulero, Γ funzione gamma. Allora

$$\boxed{\sum_{n\le x} g(n) \sim \frac{1}{e^{\gamma\tau}\Gamma(\tau)}\frac{x}{\log x}\prod_{l\le x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{g(l^\nu)}{l^\nu}.,}$$

$$\mu^{(k)}(\lambda(n)) \quad \text{e} \quad \mu^{(k)}(\mathrm{ord}_a(n)) \qquad \text{sono moltiplicative!}$$

✎ Mirsky. $\forall A > 0$

$\tilde{\mathcal{S}}^k_\lambda(x) = \qquad\qquad = \qquad\qquad =$

Il metodo per λ e $\mathrm{ord}_a(n)$ k–liberi

Teorema (Wirsing – 1961). *Sia $g(n)$ moltiplicativa, $0 < g(p^\nu) \ll c^\nu$, $c < 2$ e*

$$\sum_{p \le x} g(p) = (\tau + o(1))\pi(x)$$

per qualche $\tau \ne 0$. Sia γ costante di Eulero, Γ funzione gamma. Allora

$$\boxed{\sum_{n \le x} g(n) \sim \frac{1}{e^{\gamma\tau}\Gamma(\tau)} \frac{x}{\log x} \prod_{l \le x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g(l^\nu)}{l^\nu}.,}$$

$$\mu^{(k)}(\lambda(n)) \quad \text{e} \quad \mu^{(k)}(\mathrm{ord}_a(n)) \qquad \text{sono moltiplicative!}$$

✎ Mirsky. $\forall A > 0$

$$\tilde{\mathcal{S}}^k_\lambda(x) = \sum_{p \le x} \mu^{(k)}(\lambda(p)) = \qquad\qquad =$$

Il metodo per λ e $\mathrm{ord}_a(n)$ k–liberi

Teorema (Wirsing – 1961). *Sia $g(n)$ moltiplicativa, $0 < g(p^\nu) \ll c^\nu$, $c < 2$ e*

$$\sum_{p \le x} g(p) = (\tau + o(1))\pi(x)$$

per qualche $\tau \neq 0$. Sia γ costante di Eulero, Γ funzione gamma. Allora

$$\boxed{\sum_{n \le x} g(n) \sim \frac{1}{e^{\gamma\tau}\Gamma(\tau)} \frac{x}{\log x} \prod_{l \le x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g(l^\nu)}{l^\nu}.,}$$

$$\mu^{(k)}(\lambda(n)) \quad \text{e} \quad \mu^{(k)}(\mathrm{ord}_a(n)) \qquad \text{sono moltiplicative!}$$

✎ Mirsky. $\forall A > 0$

$$\tilde{\mathcal{S}}_\lambda^k(x) = \sum_{p \le x} \mu^{(k)}(\lambda(p)) = \#\{p \le x \mid p - 1 \text{ è } k\text{–libero}\} =$$

Il metodo per λ e $\mathrm{ord}_a(n)$ k–liberi

Teorema (Wirsing – 1961). *Sia $g(n)$ moltiplicativa, $0 < g(p^\nu) \ll c^\nu$, $c < 2$ e*

$$\sum_{p \le x} g(p) = (\tau + o(1))\pi(x)$$

per qualche $\tau \neq 0$. Sia γ costante di Eulero, Γ funzione gamma. Allora

$$\boxed{\sum_{n \le x} g(n) \sim \frac{1}{e^{\gamma\tau}\Gamma(\tau)} \frac{x}{\log x} \prod_{l \le x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g(l^\nu)}{l^\nu}.,}$$

$$\mu^{(k)}(\lambda(n)) \quad \text{e} \quad \mu^{(k)}(\mathrm{ord}_a(n)) \qquad \text{sono moltiplicative!}$$

✎ Mirsky. $\forall A > 0$

$$\tilde{\mathcal{S}}_\lambda^k(x) = \sum_{p \le x} \mu^{(k)}(\lambda(p)) = \#\{p \le x \mid p-1 \text{ è } k\text{–libero}\} = \alpha_k \pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)$$

Usando il Teorema di densità di Chebotarev:

Usando il Teorema di densità di Chebotarev:

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}^k_{\mathrm{ord}_a}(x) = \#\{p \le x \mid p \nmid a,\ \mathrm{ord}_p(a) \text{ è } k\text{–libero}\} = \beta_{a,k}\pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^\sigma x}\right)}$$

$\exists \sigma = \sigma(a, k)$

Usando il Teorema di densità di Chebotarev:

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}^k_{\mathrm{ord}_a}(x) = \#\{p \le x \mid p \nmid a,\ \mathrm{ord}_p(a)\text{ è } k\text{–libero}\} = \beta_{a,k}\pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^\sigma x}\right)}$$

$\exists \sigma = \sigma(a,k)$

In generale se f è un funzione t.c. $\mu^{(k)}(f(n))$ è moltiplicativa,

Usando il Teorema di densità di Chebotarev:

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}^k_{\mathrm{ord}_a}(x) = \#\{p \le x \mid p \nmid a,\ \mathrm{ord}_p(a)\text{ è } k\text{–libero}\} = \beta_{a,k}\pi(x) + O\left(\frac{x}{\log^\sigma x}\right)}$$

$\exists \sigma = \sigma(a,k)$

In generale se f è un funzione t.c. $\mu^{(k)}(f(n))$ è moltiplicativa,

$$\boxed{\tilde{\mathcal{S}}^k_f(x) \sim \tau_{f,k}\pi(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{S}^k_f(x) \sim \frac{\pi(x)}{e^{\gamma\tau_{f,k}}\Gamma(\tau_{f,k})}\prod_{p\le x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\mu^{(k)}(p^\nu)}{p^\nu}}$$