Università degli studi di Roma Tre
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica di

Francesca Romana Ramacciotti

Angelo Genocchi e il suo contributo alla Teoria dei numeri

Relatore
Prof. Francesco Pappalardi

Anno Accademico 2002/2003
Luglio 2003

Classificazione AMS: 01A55, 01D41,
Parole chiave: storia della matematica del XIX secolo, equazioni diofantee in più variabili

Scopo di questo lavoro è presentare la vita di Angelo Genocchi, matematico italiano del XIX secolo, e parte di quello che è stato il suo contributo alla Teoria dei Numeri.

Nel primo capitolo forniremo un quadro generale della sua vita che ha una svolta improvvisa nell'agosto del 1848.
Genocchi infatti abbandona la sua promettente carriera di professionista e docente nel campo della giurisprudenza [2], per sfuggire agli Austriaci che avevano rioccupato Piacenza, la sua città natale, e così si avvicina al più incerto avvenire di matematico a Torino, dove ... *"restava viva la Costituzione e con essa un regime parlamentare di stampo liberale e soprattutto la prospettiva dell'Unità."* [3].

In quel periodo il mondo matematico torinese era dominato dalla figura di Giovanni Plana. Primo allievo piemontese ad essere ammesso all'*Ecole Polytechnique* di Parigi, dove fu allievo di Lagrange, Plana tornò a Torino come professore di analisi infinitesimale all'università e qui, sotto l'influenza del suo professore, riportò quanto appreso puntando a risolvere i problemi dei fondamenti del calcolo in un modo puramente formale.
Sempre da Lagrange gli viene quell'attenzione a collaborare con l'ambiente militare per cercare di risolvere problematiche ad esso inerenti, una tradizione che in Italia aveva avuto origine nella metà del settecento quando, lo stesso Lagrange aveva tenuto un corso di Analisi presso la Scuola di artiglieria di Torino. Ma, se da una parte, questi aspetti tendono a dare maggior rilevanza alla matematica torinese e a fornire una base culturale tecnico-scientifica che prepari degli specialisti in campo militare e civile, dall'altra la tengono legata e le impediscono di svilupparsi in alcune direzioni, quali quella dell'analisi che Cauchy stava riorganizzando in quel periodo in Francia.

Genocchi si inserisce in questo ambiente e cerca, libero dalla tradizione matematica torinese, di dare nuovi spunti allo studio di questa materia.

Il suo approccio è da autodidatta e proprio questo gli consente di dedicarsi a quegli aspetti della matematica che, estranei all'ambiente in cui studia, erano invece di grande importanza a livello europeo; è questo il caso della Teoria dei Numeri di cui Genocchi fu uno dei primi cultori in Italia - dopo Lagrange - e che *"..rimase per tutta la vita il suo interesse più profondamente sentito."* [2]
Proprio a questo aspetto noi dedicheremo la nostra attenzione e cercheremo di dare una panoramica sugli argomenti da lui trattati.

Nel secondo capitolo, infatti, presenteremo alcune delle sue opere che riguardano appunto il campo della Teoria dei Numeri.
Di talune illustreremo un semplice sunto limitandoci a riportare i passaggi salienti delle sue dimostrazioni e congetture; di altre approfondiremo il contenuto, non solo per apprezzarne la precisione e la chiarezza, ma per coglierne al meglio le intuizioni e la dedizione con cui il matematico piacentino si pone di fronte ad ogni questione che gli viene proposta.

Da ogni suo scritto emerge l'attenzione che egli pone per rivendicare le particolarità della matematica italiana e la qualità dei risultati da essa raggiunti.
Proprio questo suo desiderio di valorizzare i lavori italiani e l'interesse storico lo portano a incontrare il principe Baldassarre Boncompagni, che, con le sue ingenti possibilità economiche, si dedica a far tradurre e salvare opere dei matematici medioevali, da qui, il nostro autore, prende lo spunto per mostrare la sua cultura storica e la sua abilità come teorico dei numeri.
Infatti quando nel 1853 viene ritrovata, dal principe romano un'opera del $XIII$ secolo del matematico italiano Leonardo Fibonacci da Pisa, che comprendeva tre scritti di notevole originalità: il Flos, l'Epistola ad Magistrum Theodorum , il Liber Quadratorum, Genocchi viene interpellato per partecipare alla stesura di alcune *Note Analitiche* in cui non solo spiega i passaggi mancanti dell'opera del matematico toscano, ma dà anche un grande con-

tributo per ampliare alcuni concetti in essa raccolti.
Tra questi ci soffermeremo soprattutto sul lavoro da lui svolto nei seguenti ambiti:
i) risoluzione dell'*uguaglianza duplicata*, cioè *"trovare tre numeri che sommati al quadrato del primo diano un quadrato. Inoltre se a questo quadrato si somma il quadrato del secondo si ottiene un ulteriore quadrato. Infine aggiungendo a quest'ultimo quadrato il quadrato del terzo si ottiene ancora un quadrato"* che il nostro autore estende anche al caso di n incognite e che si può esprimere attraverso il sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = u_1^2 \\ u_1^2 + x_2^2 = u_2^2 \\ u_2^2 + x_3^2 = u_3^2 \\ ... \\ u_{n-1}^2 + x_n^2 = u_n^2. \end{cases}$$

Partendo da quanto ottenuto da Fibonacci, Genocchi descrive le soluzioni razionali e cerca poi di dare alcuni criteri per poter risolvere il sistema solo con interi.
ii) soluzione del *problema del congruo* che è il seguente:
Problema.[1] Trovare un quadrato tale che, quando gli si somma o sottrae un dato intero si ottengono due nuovi quadrati, cioè risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 - y = t^2 \\ x^2 + y = u^2. \end{cases}$$

Definizione 1 *Un intero y è detto* congruo *se esistono $x,\ t,\ u \in \mathbb{N}$ tali che $x,\ y,\ ,t\ ,u$ risolvono il precedente sistema. In tal caso $x^2,\ t^2,\ u^2$ sono detti* quadrati congruenti.

Egli determina alcuni criteri per risolvere il "problema del congruo", mostrando che per trovare le soluzioni delle due equazioni precedenti basta trovare

[1] Nell'appendice abbiamo scritto un programma in C che utilizza la parametrizzazione proposta da Fibonacci - vedi pag. 33 - per produrre infinite soluzioni a questo problema.

una coppia (t, u) che renda possibile la seguente uguaglianza:

$$t^4 + 4u^4 = yv^2.$$

Allora si soddisfanno simultanee le due sopra riferite, prendendo

$$x = \frac{y^2v^4 + 16t^4u^4}{4tuv(4u^4 - t^4)}.$$

Infatti preso x in questo modo si trova che

$$x^2 - y = T^2$$

è soddisfatta per

$$T = \frac{t^8 - 8t^6u^2 - 8t^4u^4 - 32t^4u^6 + 16u^8}{4tuv(4u^4 - t^4)} \ ;$$

mentre

$$x^2 + y = U^2$$

dà

$$U = \frac{t^8 + 8t^6u^2 - 8t^4u^4 + 32t^4u^6 + 16u^8}{4tuv(4u^4 - t^4)}.$$

Genocchi dimostra che una volta fissato il valore di x, come somma di due quadrati, esistono tanti y quanti i modi che si hanno per scrivere x e anche che se si fissa $y = h$ esistono tanti x quanti triangoli rettangoli ci sono di area pari ad $\frac{h}{4}$ cioè in numero finito nell'anello degli interi e infiniti nel campo dei razionali. Egli lega così lo studio del congruo alla Teoria sui triangoli rettangoli utilizzando alcuni dei teoremi enunciati da Fermat, ad esempio, nel dare una regola su come, a partire da una soluzione se ne possono costruire altre, sfrutta lo stesso artifizio utilizzato da Fermat nel dimostrare che esistono infiniti triangoli rettangoli a lati razionali con area fissata[2].
Sempre riguardo il problema del congruo il nostro autore fa notare che Fibonacci aveva mostrato sia che un congruo non è mai uguale ad un quadrato,

[2] Il metodo di Fermat ci dice che dato un triangolo (α, β, γ) si ottiene un altro triangolo, con i cateti pari a $2mn$ e $m^2 - n^2$, con la stessa area se si prendono come nuovi parametri $(m, n) = (\gamma^2, 2\alpha\beta)$ e si divide poi ciascun lato per $2\gamma(\alpha^2 - \beta^2)$.

sia che si può scrivere come l'area di un triangolo rettangolo pitagorico, e sebbene Leonardo Pisano non avesse mai unito i due concetti, il matematico piacentino consegna a lui la paternità del teorema espresso circa quattro secoli dopo da Fermat: *"L'area di un triangolo rettangolo a lati razionali non è mai un quadrato."*, dove per "lati razionali" intendiamo essere compresi sia i cateti che l'ipotenusa.

Genocchi inoltre trova un passaggio mancante che rende completa la dimostrazione data dal Fibonacci per mostrare che un congruo non può mai essere uguale ad un quadrato, cioè completa il punto dove Fibonacci afferma che avere un congruo pari ad un quadrato equivale a supporre vera la seguente proporzione

$$m : n = (m + n) : (m - n),$$

dove $m > n$ e $(m, n) = 1$.

Calcola dei limiti inferiori e superiori sui numeri che permettono di trovare un dato congruo e dei criteri per stabilire se un numero primo, espresso attraverso la forma $8a \pm 1$ oppure $8a \pm 3$, possa o no rappresentare un congruo.

Questi criteri lo portano ad affermare che:

- un numero primo p del tipo $8a + 3$ non può mai essere un congruo;
- un primo p del tipo $8a - 1$ è un congruo solo se soddisfa l'equazione $r^4 - 6r^2s^2 + s^4 = \pm pk^2$ per (r, s, k) interi opportuni;
- un numero primo p del tipo $8a - 3$ è congruo solo se soddisfa $r^4 + s^4 = 2pq^2$, oppure $r^4 + 4s^4 = pq^2$, o ancora $r^4 + 6r^2s^2 + s^4 = pq^2$ con (r, s, q) interi opportuni;
- un numero primo p del tipo $8a + 1$ può rappresentare un congruo se soddisfa $r^4 + s^4 = 2pq^2$, o $r^4 + 4s^4 = pq^2$, o $r^4 + 6r^2s^2 + s^4 = pq^2$ oppure $\pm(r^4 - 6r^2s^2 + s^4) = pq^2$ con (r, s, q) interi opportuni [3].

[3] Alcuni numeri della sequenza dei congrui: 24, 96, 120, 240, 336, 384, 480, 720, 840, 960, 1320, 1344, 1536, 1920, 1944, 2016, 2184, 2520, 2880, 3360, 3696, 3840, 3960, 4896, 5280, 5376, 5544, 6144, 6240, 6840, 6864, 7680, 7776, 8064, 8736, 9240, 9360, 9720, 10080, 10296, 10920, 11520, 12144.

In realtà quelli che Genocchi trova sono dei criteri per poter affermare se un numero non è congruo, ma non per poter trovare tutti i congrui, sia tra gli interi che tra i razionali.

Nelle dimostrazioni dei criteri appena visti il nostro autore fa spesso uso di teoremi che a noi risultano essere stati enunciati da Fermat, ma non lo cita mai, cosa molto strana per uno come Genocchi sempre attento a render giustizia a tutti, preciso e puntiglioso nei suoi richiami. Egli, infatti, in tutti i passi delle sue dimostrazioni o osservazioni, non perde occasione di richiamare l'autore di questo o quell'enunciato che utilizza.
Questo aspetto, a nostro giudizio, è dovuto al fatto che riconosce all'opera di Fibonacci, e non di Fermat, di aver trovato certi teoremi o gli spunti di questi pur non avendoli enunciati in modo rigoroso.
Ci teniamo a precisare che è un'opinione del tutto personale che non trova riscontro in nessuna analisi storica da noi esaminata.

Concluderemo il capitolo riportando altri suoi scritti sulla Teoria della Reciprocità, su alcuni casi particolari riguardanti l'Ultimo Teorema di Fermat, in particolare ci soffermeremo sulla dimostrazione che il nostro autore dà circa l'impossibilità di risolvere il caso $n = 7$:

$$x^7 + y^7 + z^7 = 0,$$

non solo per quel che riguarda gli interi, ma estendendo la dimostrazione anche ai razionali e agli irrazionali. Difatti richiamando le formule newtoniane e il loro rapporto con le funzioni simmetriche elementari trova la seguente relazione

$$x^7 + y^7 + z^7 = \sigma_1^7 - 7(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1^4 - \sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2) + 7\sigma_1(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)^2$$

dove $\sigma_i = \sigma_i(x, y, z)$ è la i-esima funzione simmetrica elementare su x, y, z. Il matematico piacentino dimostra che l'equazione a secondo membro è sempre diversa da zero tranne che nei casi banali in cui una delle tre variabili è nulla, oppure nel caso in cui le soluzioni sono proporzionali a radici terze dell'unità. Egli presenta poi una particolare proprietà dei numeri $x = 3,\ y = 4,\ z = 5$ e $s = 6$ dimostrando che sono gli unici interi che verificano simultaneamente le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} xy &= 2s \\ x^2 + y^2 &= z^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= s^3. \end{aligned}$$

Ci occuperemo infine di una proprietà trovata dal nostro autore sui numeri di Bernoulli che sono legati ai coefficienti G_{2n}, risultanti dallo sviluppo del polinomio di Mac Laurin della funzione

$$\frac{2x}{e^x + 1},$$

attraverso la relazione:

$$G_{2n} = 2(2^{2n} - 1)B_{2n}.$$

Questi coefficienti G_{2n} verranno in seguito battezzati con il nome di *numeri di Genocchi* e studiati dai matematici del XX secolo attraverso alcune congetture e interpretazioni combinatorie. Non siamo riusciti a risalire a chi fu il primo a chiamarli in questo modo, tra i testi, in cui li abbiamo trovati citati, il più antico risale al 1935[4] e vengono definiti da:

Definizione 2 *i numeri di Genocchi sono quei numeri dati dalla funzione generatrice*

$$\frac{2x}{e^x + 1} = x + \sum_{n \geq 1} (-1)^n G_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Infine, nel terzo capitolo, abbiamo deciso di presentare alcune interpretazioni combinatorie moderne dei numeri di Genocchi, attraverso funzioni o

[4]D. H. Lehmer, Lacunary recurrence formulas for the numbers of Bernoulli and Euler, Annals Math., 36 (1935), 637-649.

permutazioni dei numeri di Genocchi.
Lo studio di questi numeri comincia non prima del 1970 e continua fino ai nostri giorni anche perché è stato legato allo studio delle *permutazioni alternate*, cioè quelle permutazioni per cui vale:

$$\begin{aligned}\sigma(i) &\leq \sigma(i+1) \quad \text{se } \ i \ \text{ è dispari;}\\ \sigma(i) &\geq \sigma(i+1) \quad \text{se } \ i \ \text{ è pari} \quad \text{con } \ 1 \leq i \leq 2n-2.\end{aligned}$$

In conclusione, volendo far nostre le critiche presentate dallo storico Ettore Picutti [6], ci colpisce come tutto il lavoro del matematico piacentino, che all'epoca aveva smosso l'interesse di grandi matematici europei, sia stato negli anni successivi quasi del tutto ignorato.
Probabilmente ciò è dovuto alla scarsa attenzione che è stata data, dagli storici italiani della matematica, alla matematica italiana. Questo, invece, non sembra essere accaduto in Francia o in altre nazioni europee, dove "l'amor patrio" evidentemente è stato, e forse lo è tuttora, molto più sentito.
Noi, ad esempio, fino a che non abbiamo intrapreso questo studio, ignoravamo il lavoro e il nome di questo matematico che invece sembra essere stato uno dei più noti dell'Università di Torino a livello europeo nel XIX secolo.
Ne sono prova, a nostro giudizio, i nomi dei personaggi con cui Genocchi ebbe una frequente corrispondenza tra cui ricordiamo: Beltrami, Cantor, Hermite, Jacobi, Kronecker, Lebesgue, Schwarz e Weierstrass solo per citarne alcuni, gli stessi che intervennero, in occasione del suo trigesimo, scrivendo una valutazione sull'opera di costui [1].

Un segno che Angelo Genocchi è stato profondamente stimato e apprezzato dai suoi colleghi e da quanti lo hanno conosciuto è testimoniato da quanto riportato sulla lapide che lo ricorda nel cortile d'onore del Palazzo dell'Università di Torino:

Angelo Genocchi

da Piacenza

alto ingegno carattere antico

prima a se stesso

indi per sei lustri alla gioventù subalpina

maestro

l'analisi matematica

di dotte ricerche accrebbe

poi che qui lo ebbe tratto

nel MDCCCXLVIII

ardente amore di libertà e di scienza.[2]

o dalla targa, esposta nella via dove nacque, nella sua città natale:

Figura 1: Targa di Via Genocchi a Piacenza

Ci preme infine indicare che tutte le notizie biografiche relative ai matematici nominati in questo lavoro sono state tratte dal sito:

`http://www.history.mcs.st-andrews.ac.uk`,

mentre quelle di alcuni storici della matematica da

`http://www.math.unifi.it/archimede`.

Bibliografia

[1] F. Siacci, *Cenni necrologici di Angelo Genocchi*, Mem. R. Acc. Sci. Torino, t. 39 (1889), pp. 470-486.

[2] A. Conte, *Angelo Genocchi patriota e matematico*, da: *Angelo Genocchi e i sui interlocutori scientifici. Contributi dall'episolario*, Deputazione Subalpina di Storia Patria (1991), pp. 2-9.

[3] A. C. Garibaldi, *Sui rapporti tra Angelo Genocchi e Placido Tardy*, da: *Angelo Genocchi e i sui interlocutori scientifici. Contributi dall'episolario*, Deputazione Subalpina di Storia Patria (1991), pp. 285-286.

[4] E. D'Ovidio, *Onoranze ad A. Genocchi*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. 27 (1891-1892), pp. 1088-1106.

[5] H.C. Kennedy, *Peano: Life and Works of Giuseppe Peano*, Dordrecht (1980).

[6] E. Picutti, *I contributi di Angelo Genocchi alla storia della matematica medioevale*, da: *Angelo Genocchi e i sui interlocutori scientifici. Contributi dall'episolario*, Deputazione Subalpina di Storia Patria (1991), pp. 241-280.

[7] A. Genocchi, *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano, pubblicati da B. Boncompagni*, Annali di Sc. Mat. e Fis., t. 5 e 6 (1855), pp. 161-185 / 218-251 / 273-320 / 345-362.

[8] A.Genocchi, *Intorno ad alcuni problemi trattati da Leonardo Pisano nel suo* Liber Quadratorum. *Brani di Lettere dirette dal Sig. Angelo Genocchi a D. Baldassarre Boncompagni*, Annali di Sc. Mat. e Fis., t. 5 e 6 (1855), pp. 186-209 / 251-259.

[9] G. H. Hardy, E.M. Wright, *An introduction to the Theory of numbers*, Oxford Science Publications, Fifth edition (1979), pp. 299-300.

[10] H. Cohn, *Advanced Number Theory* , Dover Publications, (1980), p. 208.

[11] A. Genocchi, *Intorno all'equazione* $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, Annali di Matematica pura ed applicata, t. 6 (1864), pp. 287-288.

[12] A. Genocchi, *Intorno ad alcune somme di cubi*, Annali di Matematica pura ed applicata, t. 7 (1865), pp. 151-158.

[13] A. Genocchi, *Leonardo Pisano matematico del secolo XIII*, Annali di Scienze Mat. e Fis., t. 8 (1857), pp. 279-283.

[14] A. Genocchi, *Intorno ad alcune forme di numeri primi*, Annali di Matematica pura ed applicata, t. 2 (1868-1869), pp. 256-267.

[15] A. Genocchi, *Sur la loi de réciprocité de Legendre étendue aux nombres non primiers*, Comptes rendus Acad. des Sc. Paris, t. 90 (1880), pp. 300-302.

[16] A. Genocchi, *Remarques sur une démonstration de la loi de réciprocité*, Comptes rendus Acad. des Sc. Paris, t. 101 (1885), pp. 425-427.

[17] A. Genocchi, *Intorno all'ampliazione d'un lemma del Gauss*, Bull. di Bibl. e di Storia Sc. Mat. e Fis., t. 18 (1885), pp. 650-651.

[18] A. Genocchi, *Teoremi di Sofia Germain intorno ai residui biquadratici*, Bull. di Bibl. e di Storia Sc. Mat. e Fis., t. 17 (1884), pp. 248-251.

[19] A. Genocchi, *Intorno ad una proposizione inesatta di Sofia Germain*, Bull. di Bibl. e di Storia Sc. Mat. e Fis., t. 17 (1884), pp. 315-316.

[20] A. Genocchi, *Ancora un cenno dei residui cubici e biquadratici*, Bull. di Bibl. e di Storia Sc. Mat. e Fis., t. 18 (1885), pp. 231-234.

[21] A. Genocchi, *Intorno all'espressione generale de'numeri Bernulliani*, Annali di Scienze Mat. e Fis., t. 3 (1852), pp. 395-405.

[22] C. Viola, *Alcuni aspetti dell'opera di Angelo Genocchi riguardanti la teoria dei numeri*, da: *Angelo Genocchi e i sui interlocutori scientifici. Contributi dall'episolario*, Deputazione Subalpina di Storia Patria (1991), pp. 26-27.

[23] J.M. Gandhi, *A conjectured representation of Genocchi numbers*, Am. Math. Monthly 77 (1970), pp. 505-506.

[24] D. Dumont, *Sur une conjecture de Gandhi concernant les nombres de Genocchi*, Discrete Mathematics, v. 1, No. 4 (1972), pp. 321-327.

[25] D. Dumont, *Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi*, Duke Math. J., v. 41, No. 2 (1974), pp. 305-318.

[26] J.M. Gandhi, *A combinatorial intepretation of the Seidel generation of Genocchi numbers*, Ann. Discrete Math., v. 6 (1980), pp. 77-87.

[27] R. Ehrenborg, E. Steingrimsson *Yet Another Triangle for the Genocchi Numbers*, Europ. J. Combinatorics, v. 21, (2000), pp. 593-600.