Università degli Studi Roma Tre
Facoltà di Scienze M.F.N.
Corso di Laurea in Matematica

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica

Forme quadratiche universali e teorema del 15

Candidato
Principia Catarinella

Relatore
Prof. Francesco Pappalardi

Anno Accademico 2009-2010
Maggio 2011

Classificazione AMS: riportare i codici della classificazione AMS.

Parole chiave: riportare alcune parole chiave.

Argomento fondamentale della nostra tesi è quella parte della teoria dei numeri che si occupa ad esempio della somma di due o più quadrati. In generale ci interesseremo alla tipologia di numeri interi positivi, $(n \in \mathbb{Z}, n > 0)$ che possono essere rappresentati da una forma quadratica di dimensione 3 o 4.

L' attenzione per tali argomenti ha una storia molto lunga. Essa ebbe inizio nel lontano XVII secolo, con le asserzioni di Fermat sui numeri rappresentati dalla somma di due quadrati $x^2 + y^2$, nel tentativo di chiarire alcuni passaggi dell' opera del matematico greco Diofanto, "L' arithmetica".

Nel secolo successivo Eulero diede grandi contributi a tale materia di studio, dimostrando le affermazioni di Fermat. Nonostante molte di queste dimostrazioni riportavano lacune, egli contribuì enormemente a conferire alla teoria della rappresentazione delle basi solide.

Successivamente, verso la fine del XVIII secolo, Legendre diede inizio agli studi sulle forme quadratiche universali, ovvero capaci di rappresentare tutti gli interi positivi. Più precisamente ciò avvenne nel 1790, con l'enunciato celebre del Teorema di Tre Quadrati, al quale daremo ampio spazio nei primi due capitoli.

In particolare, partendo proprio dal Teorema di Legendre dei Tre Quadrati, determineremo le serie aritmetiche di interi non rappresentati da alcune tipologia di forme quadratiche ternarie.

Il XVIII secolo vide, inoltre, anche la scoperta di un altro importante teorema, dovuto al matematico Lagrange, il Teorema dei Quattro Quadrati (1770). Con esso ci si concentra sempre di più sulle forme quadratiche quaternarie universali.

Qui, pur concentrandoci sulle forme quadratiche quaternarie nella parte finale, non dimostreremo il Teorema dei Quattro Quadrati.

Nel XIX secolo, Gauss pubblicò le "Disquisitiones Arithmeticae" (1801), con le quali portò la teoria delle forme quadratiche allo stato moderno.

Dopo gli studi di Gauss, altri matematici che si interessarono all'argomento furono il suo discepolo Eisenstein, e più tardi, nel 1900, i matematici Smith e Minkowski. Questi ultimi si soffermarono maggiormente sugli studi di Gauss riguardanti il genere di una forma quadratica, infatti tali studi saranno citati, in questa tesi, nel III capitolo, a proposito delle studio dei reticoli associati ad una forma quadratica e del genere a cui appartengono. Inoltre introdussero anche alcune invarianti del genere, dalle quali sucessivamente il matematico Hasse ottenne abilmente una classificazione delle forme quadratiche razionali, basata sulla nozione di numero $p-$adico, dovuta ad Hensel.
Nel 1916 il matematico indiano Ramanujan si occupò sopratutto dello studio di terne e quaterne universali. Per quanto riguarda le terne, dedicò particolare attenzione alla forma quadratica

$$f = x^2 + y^2 + 10z^2,$$

riuscendo non solo a elencare gli interi da essa non rappresentati, ma anche ad affermare che questi non obbediscono a nessuna legge, per cui non corrispondono a nessuna progessione aritmetica.
Una forma quadratica con tali prerogative sarà definita irregolare. Ci occuperemo di tali forme nel II capitolo.
Per quanto riguarda invece gli studi sulle quaterne universali, Ramanujan stilò una lista di tutte le forme quadratiche definite positive diagonali universali, che venne corretta più tardi con l'eliminazione di una sola quaterna ($[1, 2, 5, 5]$), quindi si rivelò alquanto precisa e con pochi errori.
Dopo il lavoro di Ramanujan, molti furono i matematici interessati a voler elencare tutte le quaterne universali. Tra questi ricordiamo Gordon Pall e Willerding, il quale nel 1948, stilò un altro elenco, non privo di errori!
Ad eliminare questi ultimi ci pensò, più tardi, un altro matematico indiano, Manjul Bhargava. Egli ci lavorò su dopo il notevole lavoro di Conway e Schneeberger, i quali, nel 1993, enunciarono il Teorema del 15. Questo afferma che, se una forma quadratica definita positiva, a matrice intera, rap-

presenta tutti gli interi positivi fino a 15, allora rappresenta anche ogni $n \in \mathbb{Z}$, con $n > 0$, quindi è universale.
Bhargava provò a dare una semplice dimostrazione di questo teorema e, successivamente, a dedurre un elenco ufficialmente completo di tutte le quaterne universali. Osservò, dunque, che delle 204 forme, da lui elencate, solo 168 erano presenti nella lista di Willerding: ne aveva omesse 36!
In realtà con il Teorema del 15 si pone realmente fine alla necessità di elencare forme quadratiche universali, poichè infatti esso ci spiega esattamente le caratteristiche per cui una forma quadratica è in grado di rappresentare tutti gli interi.
Per giungere alla formulazione del Teorema del 15, furono necessari vari studi: prima di esso vennero enunciati altri due teoremi simili, uno per le forme quadratiche a matrice intera, l'altro per le forme quadtatiche intere (in base alle due definizioni di integrità date nel I capitolo). Tali teoremi ruotano attorno alla determinazione di due costanti, c, C (una per ogni teorema), le quali costituiscono il limite superiore di rappresentazione: se una forma quadratica rappresenta tutti gli interi fino a c o C allora è universale.
Solo successivamente si esplicitarono tali costanti, per c si scopri che il valore era proprio 15, mentre per C, calcoli successivi, mostrarono che era pari a 290.
Il Teorema del 15 rappresenta anche il punto di arrivo della nostra tesi. Infatti, dopo aver parlato di reticoli e genere nel III capitolo, e dopo aver studiato per bene la connessione tra forme quadratiche e reticoli, nel IV capitolo analizzeremo per bene i reticoli non universali, detti Escalators, partendo da quelli di dimensione più bassa, fino ad arrivare a quelli di dimensione 4. Grazie a questi ultimi scopriremo esattamente quante sono le forme quadratiche non universali.
Molto importante, per quest' ultima parte del libro, è la riduzione-diagonalizzazione di una forma quadratica, dovuta ai matematici Hasse e Minkowski.

Di questa parleremo ampiamente alla fine del III Capitolo.
Infine il nostro lavoro si conclude con alcuni elenchi di reticoli escalators 4-dimensionali e con la lista completa di Bhargava di forme quadratiche quaternarie non universali.
Sarà un lavoro lungo e meticoloso, ma alla fine ci porterà a risultati soddisfacenti.

Nel I capitolo ci occuperemo delle forme quadratiche ed enunceremo il Teorema dei Tre Quadrati di Legendre. Esporremo anche la laboriosa dimostrazione di quest' ultimo, proposta da Gauss.
Dopo aver definito, quindi, una forma quadratica e la matrice ad essa associata, daremo le due diverse definizioni di integrità di una forma quadratica, che saranno riprese poi nell'ultimo capitolo; descriveremo, inoltre, anche il concetto di equivalenza tra due forme quadratiche, con altre varie proprietà.
A questo punto, è risultato necessario definire alcuni elementi necessari alla dimostrazione di Gauss del Teorema dei tre quadrati, ovvero il simbolo di Hilbert e le due invarianti di una forma quadratica (discriminante ed $\varepsilon(f)$).
Quindi il famoso Teorema fulcro di questo primo capitolo è il seguente:

Teorema dei Tre Quadrati di Legendre: *Sia $n \in \mathbb{N}$, n si può scrivere come somma di tre quadrati interi, cioè $n = x^2 + y^2 + z^2$,con $x, y, z \in \mathbb{Z}$ se e solo se $n \neq 2^{2\alpha}(8k + 7)$,con $\alpha, k \in \mathbb{Z}$.*
La dimostrazione classica del *Teorema dei tre Quadrati di Legendre* procede per induzione sull' intero α. Noi ometteremo questa ma ne esamineremo altre due. La prima, fa uso per lo più dei primi $p-$adici e lavora sui campi $p-$adici, l' altra, più tecnica, dovuta a *Gauss*, utilizza le invarianti di una forma quadratica.
Dopodichè abbiamo esposto alcune importanti conseguenze del Teorema dei Tre Quadrati, tra cui la più importante è la seguente:

Teorema 1 *:$\forall n \in \mathbb{Z}$,con $n > 0$,n è somma di tre quadrati* ***triangolari****.*

Un quadrato triangolare si definisce nel modo seguente:

Definizione 1 *:Un numero $n \in \mathbb{Z}$ si dice **triangolare** se è della forma $\frac{m(m+1)}{2}$,con $m \in \mathbb{Z}$.*
*La definizione **triangolare** discende dal fatto che un tale numero si può rappresentare a forma di "triangolo", ovvero preso un insieme di cardinalità n è possibile disporre i suoi elementi su una griglia in modo tale che formino un **triangolo equilatero**.*

Nel II capitolo, invece, prendiamo in esame alcune generalizzazioni del teorema dei tre quadrati, ovvero esaminiamo quali tipi di interi non sono in grado di rappresentare alcune forme quadratiche ternarie particolari.
Questi interi seguono delle leggi precise e sono esprimibili tramite particolari serie aritmetiche. Normalmente queste ultime risultano quasi sempre della forma: $2^{2\alpha}(8k+7)$.
Le forme quadratiche che non sono in grado di rappesentare determinati insiemi di interi, esrimibili tramite una serie aritmetica, sono definite **regolari**.
Se invece una forma quadratica non riesce a rappresentare un insieme di interi che non obbedienti ad alcuna legge aritmetica, la definiremo **irregolare**.

Il III capitolo prende in esame la struttura di **reticolo**, menzionando alcune sue proprietà, dopodichè si addentra nella Teoria del **genere** di una forma quadratica.
Un reticolo si definisce nel modo seguente:

Definizione 2 *: Un **Reticolo** L su V è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero di rango n, cioè l' insieme*

$$x_1v_1 + ... + x_nv_n,$$

dove $v_1, ...v_n$ sono vettori linearmente indipendenti e $x_1, ..., x_n \in \mathbb{Z}^n$.
Più semplicemente possiamo definire $L \subseteq \mathbb{R}^n$ come un sottogruppo additivo

e discreto tale che $L = \langle v_1, ..., v_n \rangle$, *con* v_i *linearmente indipendenti per* $i = 1, ..., n$. *Inoltre* $L \simeq \mathbb{Z}^n$.
$L = (\underline{0})$ *è il reticolo banale.*

Una importante categoria di reticoli, che ci interesserà particolarmente, è quella dei reticoli interi, definiti nel modo seguente:

Definizione 3 : *Un reticolo* $L \subseteq \mathbb{R}^n$ *si dice* ***intero*** *se,* $\forall \alpha, \beta \in L, \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$.

Ad ogni reticolo L si può associare una matrice nel modo seguente:

Definizione 4 : *Se* L *è un reticolo intero, con* $L = \langle v_1, ..., v_k \rangle$ *e* v_i *linearmente indipendenti per* $i = 1, ..., n$, *allora possiamo associare ad esso la matrice dei prodotti scalari della base, cioè* $A_L = (\langle v_i, v_j \rangle), \forall i, j = 1, ..., n$.
L si dirà reticolo binario, ternario, quaternario,...,n-ario in accordo con il rango di A_L.

Proposizione 1 :*Se uno stesso reticolo* L *è generato da due basi* $\langle v_1, ..., v_k \rangle$ *e* $\langle w_1, ..., w_k \rangle$ *allora* $(V_1, ..., V_k) = (W_1, ..., W_k)S$, *dove* $S \subset SL_{k \times k}(\mathbb{Z})$ *è una matrice invertibile, cioè* $det(S) = \pm 1$.
Se la matrice associata a L *con* $\langle v_1, ..., v_k \rangle$ *è* A *e la matrice associata a* L *con* $\langle w_1, ..., w_k \rangle$ *è* B *allora* $A = S^T B S$, *con* $S^T B S$ *intera.*

Ciò che dipende dal reticolo è quindi la **classe di congruenze di matrici simmetriche** non la matrice dei prodotti scalari della base legata ad esso.
A questo punto, abbiamo cominciato a interessarci del genere di una forma quadratica, del genere spinore, e del gruppo spinore.
Queste tre nozioni sono fondamentali per capire al meglio il legame tra forme quadratiche e reticoli e per classificare le forme quadratiche universali. Infine nell' ultima parte del III capitolo abbiamo descritto il processo di riduzione-diagonalizzazione di Hasse-Minkowski, che ci servirá, in seguito, nel capitolo

successivo.

Nel IV capitolo ci si concentra principalmente sul Teorema del 15 e sulle forme quadratiche quaternarie universali, dandone anche un elenco completo nella parte finale.
Come abbiamo già detto, nel 1993 Conway e Schneeberger enunciarono il Teorema del 15, sulla rappresentazione degli interi $n > 0$, da parte di forme quadratiche intere definite positive.
In questa seconda parte del IV Capitolo ci occuperemo interamente di questo importante teorema e della sua dimostrazione (pur avendo solo quella in forma semplificata, poichè l' originale non fu mai pubblicata).
Il teorema è il seguente:

Teorema 2 *: Se una forma quadratica definita positiva, f, rappresenta ogni $n \in \mathbb{Z}$, con $n > 0$, fino a 15, allora f rappresenta tutti gli interi positivi.*

Il teorema del 15 (*Teorema 2*) si occupa di forme quadratiche definite positive, a matrice intera. Sappiamo che esiste una biiezione naturale tra le classi di equivalenza di tali forme quadratiche e i reticoli aventi prodotti interni interi[1]; possiamo, quindi, oscillare liberamente tra il linguaggio delle forme quadratiche e quello dei reticoli!
Sappiamo che esiste una corrispondenza biunivoca tra reticoli e forme quadratiche: più precisamente una forma quadratica f si può considerare come la forma del prodotto interno per il corrispondente reticolo $L(f)$.
Tale legame è utile poichè ci permette di usare il reticolo corrispondente ad f per determinarne l'univarsalità.

Introduciamo alcune definizioni fondamentali per lo studio delle forme quadratiche universali:

[1]D'ora in poi, per reticolo ci riferiremo sempre a un reticolo con prodotti interni interi, e per forma quadratica f, a una forma quadratica definita positiva.

Definizione 5 *: Una forma quadratica f (o il suo reticolo corrispondente $L(f)$) si dice **universale** se rappresenta ogni $n \in \mathbb{Z}$, con $n > 0$.*

Definizione 6 *: Se una forma quadratica f non è universale, definiamo il **Truant** di f (analogamente di $L(f)$), e lo denotiamo con $\boldsymbol{T(f)}$, il più piccolo intero positivo non rappresentato da f.*
Equivalentemente possiamo scrivere:

$$T(f) = min\{k \in \mathbb{N} \mid \ f \; non \; rappresenta \; k \ \}$$

.

Un'altra nozione importante è quella di reticolo escalation ed escalator, riferite entrambe ad un reticolo (forma quadratica) non universale.

Definizione 7 *: Una **Escalation** di un reticolo L non universale è un qualsiasi altro reticolo, generato da L e da un vettore, $v \in \mathbb{R}^n$, la cui norma è pari al Truant di L, cioè $\|v\| = T(f)$.*

Definizione 8 *: Un reticolo **Escalator** è un reticolo che può essere ottenuto come risultato di una sequenza di escalations successive del reticolo zero-dimensionale.*

Passando al linguaggio delle forme quaratiche, possiamo affermare, analogamente, che:

Definizione 9 *: Se f è la forma quadratica non universale corrispondente al reticolo L, allora un' **Escalation di** f è un' altra forma quadratica con una variabile in più, cioè di una dimensione più alta della forma di partenza, costruita così: $f \longrightarrow L(f) \subseteq \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, (ottenuta appunto con calcoli sul reticolo corrispondente).*
Se $\tilde{f}$ è l'escalation di f, allora il reticolo escalator L', derivante dal reticolo $L(f)$, corrispondente a f, si ottiene in questo modo:

$$L' = L(f) + \langle v \rangle,$$

dove $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, tale che $\|v\| = T(f)$, ed è vera la corrispondenza $L' \longrightarrow \tilde{f}$.

Cominciamo a vedere come funziona il procedimento di escalation di reticoli, partendo dal reticolo di dimensione più piccola corrispondente alla forma quadratica non universale $f = 0$, cioè $L^0 = (0)$. Come abbiamo detto $T(f) = 1$, per cui il vettore di dimensione 2 da usare per il primo step di escalation è $v = \langle 1 \rangle$, con $\|v\| = 1$.
Per cui la prima escalation dà: $L' = L^0 + \langle v \rangle = (0) + \langle 1 \rangle = (1)$ e la forma quadratica associata è

$$f_1(x) = x^2, \text{ con } T(f_1) = 2$$

.

Dall'escalation del reticolo $0-$dimensionale, quindi, deriva solo l'escalator $L' = 1$.

Procediamo con l' escalation di questo reticolo $1-$dimensionale, prendendo come vettore v, tale che $\|v\| = 2$.
Per cui $L'' = L' + \langle v \rangle = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$, dove a è da determinare.
Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, abbiamo, in generale:
$a = \langle (v, w) \rangle \leq |v|^{\frac{1}{2}} |w|^{\frac{1}{2}}$.
Quindi nella nostra matrice avremo:
$a^2 \leq 2 \Rightarrow a \leq \pm\sqrt{2} \Rightarrow a = 0, \pm 1$.
I tre possibili risultati per la matrice, cioè i nostri escalators $2-$dimensionali, sono: $L''_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $L''_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $L''_c = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Il reticolo L''_c si può scartare poichè:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Effettuiamo, a questo punto, la riduzione di Hasse-Minkowski sulle matrici risultanti dall' escalation, che non sono gia ridotte. Otterremo così matrici diagonali di reticoli, associabili a forme quadratiche di dimensione 2; Tali matrici sono definite anche *matrici di Gram*.

La matrice di L''_b è già Hasse-Minkowski ridotta.
La matrice di L''_a invece la riduciamo in questo modo: ponendo $R_2 = R_2 - R_1$, otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

mentre, operando allo stesso modo sulle colonne ($C_2 = C_2 - C_1$), abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L''_a,$$

che è la nuova matrice H-M ridotta.
Quindi dall'escalation dei reticoli 1−dimensionali otteniamo solo due escalator 2−dimensionali, non isometrici tra loro, ovvero quelli aventi matrici di Gram H-M ridotte:

$$L''_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; L''_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L''_a è il reticolo associato alla forma quadratica $f_a = x^2 + y^2$, con $T(f_a) = 3$;
L''_b è il reticolo associato alla forma quadratica $f_b = x^2 + 2y^2$, con $T(f_b) = 5$.

Procediamo facendo l'escalation di ognuno di questi escalator. Avremo:

$$L''' = L'' + \langle v \rangle,$$

dove $\|v\| = 3$ per L''_a, mentre $\|v\| = 5$ per L''_b.

- Cominciamo con l'escalation di L''_a. In questo caso $\|v\| = 3$, quindi avremo

L''' della forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ a & b & 3 \end{pmatrix},$$

con a, b da determinare in modo tale che, considerando i minori relativi ad a e b, siano verificate le disuguaglianze:
$a^2 \leq 3 \Rightarrow a \leq \pm\sqrt{3} \Rightarrow a = 0, \pm 1;$
$b^2 \leq 3 \Rightarrow b \leq \pm\sqrt{3} \Rightarrow b = 0, \pm 1.$
Quindi trascurando $a = -1$ e $b = -1$, le quali ci danno matrici riconducibili ai casi positivi, abbiamo quattro possibli matrici:

1. Se $a = 0, b = 0$ abbiamo, $L'''_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, matrice di Gram già H-M ridotta.

2. Se $a = 0, b = 1$ abbiamo, $L'''_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Se $a = 1, b = 0$ abbiamo, $L'''_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Se $a = 1, b = 1$ abbiamo, $L'''_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Facendo la riduzione di H-M dei tre reticoli L'''_e, L'''_f, L'''_g, otteniamo due escalators non isomorfi:

- $L'''_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

- Da L_f''' viene fuori un reticolo analogo a L_e'''
- $L_g''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dall' escalation di L_a'' abbiamo ottenuto quindi tre escalators non isomorfi.

•• Proseguiamo ora con l' escalation di L_b''; in questo caso invece $\|v\| = 5$, quindi L''' sarà della forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ a & b & 5 \end{pmatrix},$$

con a, b da determinare in modo tale che, considerando i minori relativi ad a, b, risultino verificate le due disuguaglianze:
$a^2 \leq 5 \Rightarrow a \leq \pm\sqrt{5} \Rightarrow a = 0, \pm 1, \pm 2$;
$b^2 \leq 10 \Rightarrow b \leq \pm\sqrt{10} \Rightarrow b = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
Trascurando le possibili matrici derivanti dalle entrate negative , abbiamo 12 possibili matrici, che ora elencheremo in forma già Hasse-Minkowski ridotta:

1. Se $a = 0, b = 0$, abbiamo $L_h''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, matrice di Gram gia H-M ridotta;
2. Se $a = 0, b = 1$, abbiamo $L_i''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, matrice di Gram gia H-M ridotta (poichè verifica tutte le varie disuguaglianze viste nel III Capitolo, nel paragrafo **??**);
3. Se $a = 1, b = 0$, abbiamo $L_m''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

4. Se $a = 1, b = 1$, abbiamo $L'''_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

5. Se $a = 0, b = 2$, abbiamo $L'''_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

6. Se $a = 2, b = 0$, abbiamo $L'''_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, matrice da scartare poichè non è definita positiva, ovvero se proviamo a ridurla col procedimento di H-M, non sono verificate le disuguaglianze da esso previste;

7. Se $a = 2, b = 2$, abbiamo $L'''_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, da scartare per gli stessi motivi del reticolo precedente;

8. Se $a = 1, b = 2$, abbiamo $L'''_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

9. Se $a = 2, b = 1$, abbiamo $L'''_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, da sartare perchè non definita positiva;

10. Se $a = 0, b = 3$, abbiamo $L'''_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, isometrico a L'''_g;

11. Se $a = 1, b = 3$, abbiamo $L'''_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, da scartare perchè non definita positiva;

12. Se $a = 2, b = 3$, abbiamo $L'''_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, da scartare poichè non definita positiva.

Dall' escalation di L''_b abbiamo ottenuto, quindi, sei escalators non isometici.

In definitiva, l' escalation dei reticoli $2-$dimensionali, L''_a ed L''_b, dà nove reticoli escalators $3-$dimensionali, non isometrici tra loro:

- $L'''_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, associato a $f_d = x^2 + y^2 + 3z^2$;
- $L'''_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, associato a $f_e = x^2 + y^2 + 2z^2$;
- $L'''_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, associato a $f_g = x^2 + y^2 + z^2$;
- $L'''_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, associato a $f_h = x^2 + 2y^2 + 5z^2$;
- $L'''_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, associato a $f_i = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2yz$;

- $L'''_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, associato a $f_m = x^2 + 2y^2 + 4z^2$;

- $L'''_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, associato a $f_n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2yz$;

- $L'''_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, associato a $f_o = x^2 + 2y^2 + 3z^2$;

- $L'''_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, associato a $f_r = x^2 + 2y^2 + 2z^2$.

Ora , facendo l' escalation di ognuno di questi nove reticoli, troviamo esattamente 207 escalators 4−dimensionali non isomorfi. Tutti questi sono della forma

$$L''' \oplus [1].$$

Noi eviteremo di elencarli poichè preferiamo esporre la lista successiva corretta e completa di Bhargava. Infatti, come abbiamo già precisato all'inizio del capitolo, molti di questi 207 reticoli in realtà non sono escalators, ovvero sono universali! Cerchiamo di dimostrare che, in effetti, solo 201 dei 207 reticoli escalators 4−dimensionali sono universali. Questo vuol dire che ci sono sei reticoli (e quindi forme quadratiche) non universali, con cui fare nuovamente l' escalation.

Per dimostrare l' universalità di questi 201 reticoli si procede come segue.
In ognuno di tali reticoli 4−dimensionali, L'''', indivuduiamo un sottoreticolo 3−dimensionale, L''', che rappresenti qualche insieme grande di interi. Tipicamente scegliamo L''' unico nel suo genere, in tal caso, dunque, esso

rappresenta tutti gli $n \in \mathbb{Z}$ che rappresenta localmente (cioè su $\mathbb{Z}_p$).
Detto ciò, mostriamo che la somma diretta tra L''' e il suo complemento ortogonale in L'''', rappresenta tutti gli interi sufficientemente grandi, cioè $n \in \mathbb{Z}$ tali che $n \geq N$, con N abbastanza grande.
Un controllo della rappresentabilità degli $n \in \mathbb{Z}$, con $n < N$, da parte di L'''', ci confermerà che L'''' è universale.
Per fare ciò, in pratica, consideriamo ad esempio l' escalation del reticolo

$$L_r''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questo è unico nel suo genere, quindi un rapido calcolo locale mostra che L_r''', e quindi f_r, corrispondente alla forma di tipo D del II Capitolo, rappresenta tutti gli $n \in \mathbb{Z}$, con $n > 0$, tali che $n \neq (2^2)^\alpha(8k+7)$, con $k, \alpha \in \mathbb{Z}$.
Sappiamo che il complemento ortogonale di L_r''' in L'''' ha matrice di Gram $[m]$, con m da determinare in modo tale che $L_r''' + [m]$ rappresenti tutti gli interi sufficientemente grandi, cioè tali che $n \geq N$, con N sufficientemente grande.
Supponiamo che L'''' non sia universale e sia $u \in \mathbb{Z}$ il più piccolo intero non rappresentato da L'''', allora in particolare u non è rappresentato neanche da L_r'''.
Ma allora $u = (2^2)^\alpha(8k+7)$ e inoltre non è un quadrato; infatti se avessimo $u = rt^2$, con $t > 1$, allora $r = \frac{u}{t^2}$ non sarebbe rappresentato da L'''', in contraddizione con la minimalità di $u \Rightarrow u$ non è un quadrato, cioè $\alpha = 0 \Rightarrow u = 8k+7 \Rightarrow u \equiv 7(mod 8)$.
Ora se $m \not\equiv 0, 3, 7(mod 8)$ allora chiaramente $u - m \neq (2^2)^\alpha(8k+7)$ o analogamente se $m \equiv 3, 7(mod 8)$ allora $u - 4m \neq (2^2)^\alpha(8k+7)$.
Quindi se $m \not\equiv 0(mod 8)$ e se $u \geq 4m \Rightarrow L_r'''$ rappresenta sia $u - m$ che $u - 4m$,cioè u è rappresentato da $L_r''' + [m]$ (un sottoreticolo di L'''') per $r \geq 4m$.

Un calcolo esplicito mostra che $m \leq 28$ e una verifica, fatta al calcolatore, ci dice che ogni escalation L'''' di L'''_r rappresenta tutti gli interi tranne $112 = 28 \times 4$.

Ogni escalator L'''' proveniente dall'escalation di L'''_r, per cui m non è un multiplo di 8, è universale.

Quest' ultima affermazione non è valida per quei reticoli L'''' per cui $m = 8k$. Definiamo una tale escalation L'''' **eccezionale**.
Fortunatamente le escalation eccezionali sono rare e facilmente trattabili. Per esempio un calcolo esplicito mostra che solo due escalations di L'''_r sono eccezionali, le altre 24 no!
Elencheremo questi casi eccezionali in una tabella a fine paragrafo.
Risulta, inoltre, che tutti i nove escalators $3-$dimensionali sono unici nel loro genere, tranne L'''_n, dunque, l'universalità delle relative escalations può essere provata essenzialmente con lo stesso procedimento della dimostrazione appena vista per L'''_r.

Esaminiamo ora il caso $L'''_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Sebbene non unico nel suo genere, L'''_n rappresenta tutti gli $n \in \mathbb{Z}$ che rappresenta localmente (su $\mathbb{Z}_p$), tranne quelli tali che $n \equiv 7, 10 (mod 12)$.
Infatti L'''_n contiene il reticolo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, unico nel suo genere e i reticoli $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, che formano insieme un genere.
Un controllo locale mostra che il genere del primo reticolo rappresenta tutti gli $n \in \mathbb{Z}$, localmente rappresentati da L'''_n, tali che $n \not\equiv 2, 3 (mod 4)$; mentre

il genere che formano gli altri due reticoli rappresenta gli interi localmente rappresentati da L_n''' tali che $n \not\equiv 1(mod3)$.
Segue, quindi facilmente, la conclusione desiderata.

Come abbiamo già visto, i casi eccezionali derivano solo da L_r''', L_m''' e L_n'''.
Due soli provengono da L_r'''.
Sebbene siano quattro quelli provenienti da L_m''', due di essi si rivelano escalations non eccezionali di L_g''' e L_i''' rispettivamente.
Analogamente, due derivano da L_n''', ma uno è l' escalation non eccezionale di L_h'''.
Rimangono quindi solo cinque escalators $4-$dimensionali effettivamente eccezionali.
In tutto quindi ci sono, tra eccezionli e non, sei escalators $4-$dimonsionali. L' escalation di ognuno di questi reticoli ci porta a 1630 reticoli $5-$dimensionali.
Viene spontaeneo ora chiedersi, anche se con un pò di timore, se tra questi reticoli ce ne siano alcuni non universali, ovvero ci sia qualche altro escalator.
La risposta è no, fortunatamente!
Tutti gli escalators $5-$dimensionali sono universali. La dimostrazione si fa più o meno alla stessa maniera del caso $4-$dimensionale ma, per certi versi, è più semplice. Infatti osserviamo, che procedendo come per l'universalità del caso $4-$dimensionale, si arriva a un esito diverso; alla fine si deduce che tutti i sei escalators rappresentano ogni $n \in \mathbb{Z}$, con $n > 0$, tranne un solo $\bar{n}_i$, per $i = 1, ..., 6$. Quindi inseriamo un singolo vettore v_i, con $\|v_i\| = \bar{n}_i$, in ogni reticolo e quest'ultimo diventa automaticamente universale, assieme alla forma quadratica ad esso corrispondente.
Dunque tutti i 1630 escalators $5-$dimensionali sono universali.
Poichè nessun escalator $5-$dimensionale può essere sottoposto escalation, essendo tutti universali, segue che i reticoli escalators esistono in numero finito, più precisamente abbiamo:

- 1 escalator di dimensione 0;
- 1 escalator di dimensione 1;
- 2 escalators di dimensione 2;
- 9 escalators di dimensione 3;
- 207 escalators di dimensione 4;
- 1630 escalators di dimensione 5,

per un totale di 1850 escalators.
La determinazione precisa del numero di Escalators permise anche di determinare il numero preciso di forme quadratiche quaternarie universali, e quindi di fare elenchi piu precisi e completi. Ed è proprio quello che fecero i matematici Willerding e l' indiano Manjul Bhargava.
Willerding, come ben sappiamo, ne trovò solo 178, dimenticandone 36, elencandone una due volte e includendo nove forme non universali.
Diamo qui di seguito la lista completa di Bhargava, con tutte le 204 forme quaternarie universali.
Useremo la consueta abbreviazione $D : [a, b, c, d, e, f]$ che rapprsenta il reticolo tridimensionale $\begin{pmatrix} a & \frac{f}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{f}{2} & b & \frac{d}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{d}{2} & c \end{pmatrix}$ di determinante D.

$1 : [1, 1, 1, 0, 0, 0]$
$2 : [1, 1, 2, 0, 0, 0]$
$4 : [1, 1, 4, 0, 0, 0], [1, 2, 2, 0, 0, 0], [2, 2, 2, 2, 2, 0]$
$5 : [1, 1, 5, 0, 0, 0], [1, 2, 3, 2, 0, 0]$
$6 : [1, 1, 6, 0, 0, 0], [1, 2, 3, 0, 0, 0], [2, 2, 2, 2, 0, 0]$
$7 : [1, 1, 7, 0, 0, 0], [1, 2, 4, 2, 0, 0], [2, 2, 3, 2, 0, 2]$
$8 : [1, 2, 4, 0, 0, 0], [1, 3, 3, 2, 0, 0], [2, 2, 2, 0, 0, 0], [2, 2, 3, 2, 2, 0]$

$9 : [1, 2, 5, 2, 0, 0], [1, 3, 3, 0, 0, 0], [2, 2, 3, 0, 0, 2]$

$10 : [1, 2, 5, 0, 0, 0], [2, 2, 3, 2, 0, 0], [2, 2, 4, 2, 0, 2]$

$11 : [1, 2, 6, 2, 0, 0], [1, 3, 4, 2, 0, 0]$

$12 : [1, 2, 6, 0, 0, 0], [1, 3, 4, 0, 0, 0], [2, 2, 3, 0, 0, 0], [2, 2, 4, 0, 0, 2]$

$13 : [2, 2, 5, 2, 0, 2], [2, 3, 3, 2, 2, 0]$

$14 : [1, 2, 7, 0, 0, 0], [1, 3, 5, 2, 0, 0], [2, 2, 4, 2, 0, 0]$

$15 : [1, 2, 8, 2, 0, 0], [1, 3, 5, 0, 0, 0], [2, 2, 5, 0, 0, 2], [2, 3, 3, 0, 2, 0]$

$16 : [1, 2, 8, 0, 0, 0], [2, 2, 4, 0, 0, 0], [2, 3, 3, 2, 0, 0]$

$17 : [1, 2, 9, 2, 0, 0], [1, 3, 6, 2, 0, 0], [2, 3, 4, 0, 2, 2]$

$18 : [1, 2, 9, 0, 0, 0], [1, 3, 6, 0, 0, 0], [2, 2, 5, 2, 0, 0], [2, 3, 3, 0, 0, 0], [2, 3, 4, 2, 0, 2]$

$19 : [1, 2, 10, 2, 0, 0], [2, 3, 4, 2, 2, 0]$

$20 : [1, 2, 10, 0, 0, 0], [2, 2, 5, 0, 0, 0], [2, 2, 6, 2, 2, 0], [2, 4, 4, 4, 2, 0]$

$21 : [2, 3, 4, 0, 2, 0]$

$22 : [1, 2, 11, 0, 0, 0], [2, 2, 6, 2, 0, 0], [2, 3, 4, 2, 0, 0], [2, 3, 5, 0, 2, 2]$

$23 : [1, 2, 12, 2, 0, 0], [2, 3, 5, 2, 0, 2]$

$24 : [1, 2, 12, 0, 0, 0], [2, 2, 6, 0, 0, 0], [2, 2, 7, 2, 2, 0], [2, 3, 4, 0, 0, 0], [2, 4, 4, 0, 2, 2], [2, 4, 4, 4, 0, 0]$

$25 : [1, 2, 13, 2, 0, 0], [2, 3, 5, 2, 2, 0]$

$26 : [1, 2, 13, 0, 0, 0], [2, 2, 7, 2, 0, 0], [2, 4, 4, 2, 2, 0, 0]$

$27 : [1, 2, 14, 2, 0, 0], [2, 3, 5, 0, 2, 0], [2, 4, 5, 4, 0, 2]$

$28 : [1, 2, 14, 0, 0, 0], [2, 2, 7, 0, 0, 0], [2, 3, 5, 2, 0, 0], [2, 4, 4, 0, 2, 0], [2, 4, 5, 4, 2, 0]$

$30 : [2, 3, 5, 0, 0, 0], [2, 4, 4, 2, 0, 0]$

$31 : [2, 3, 6, 2, 2, 0], [2, 4, 5, 0, 2, 2]$

$32 : [2, 4, 4, 0, 0, 0], [2, 4, 5, 4, 0, 0]$

$33 : [2, 3, 6, 0, 2, 0], [2, 4, 5, 2, 0, 2]$

$34 : [2, 3, 6, 2, 0, 0], [2, 4, 5, 2, 2, 0], [2, 4, 6, 4, 0, 2]$

$35 : [2, 4, 5, 0, 0, 2]$

$36 : [2, 3, 6, 0, 0, 0], [2, 4, 5, 0, 2, 0], [2, 4, 6, 4, 2, 0], [2, 5, 5, 4, 2, 2]$

$37 : [2, 5, 5, 4, 2, 0]$

$38 : [2, 4, 5, 2, 0, 0], [2, 4, 6, 0, 2, 2]$

$39 : [2, 3, 7, 0, 2, 0]$

$40 : [2, 3, 7, 2, 0, 0], [2, 4, 5, 0, 0, 0], [2, 4, 6, 2, 0, 2], [2, 4, 6, 4, 0, 0]$

$41 : [2, 4, 7, 4, 0, 2]$

$42 : [2, 3, 7, 0, 0, 0], [2, 4, 6, 0, 0, 2], [2, 4, 6, 2, 2, 0], [2, 5, 5, 4, 0, 0]$

$43 : [2, 3, 8, 2, 2, 0], [2, 5, 5, 2, 0, 2]$

$44 : [2, 4, 6, 0, 2, 0]$

$45 : [2, 4, 7, 0, 2, 2], [2, 5, 5, 0, 2, 0], [2, 5, 6, 4, 2, 2]$

$46 : [2, 3, 8, 2, 0, 0], [2, 4, 6, 2, 0, 0], [2, 5, 6, 4, 0, 2]$

$47 : [2, 4, 7, 2, 0, 2], [2, 5, 6, 4, 2, 0]$

$48 : [2, 3, 8, 0, 0, 0], [2, 4, 6, 0, 0, 0], [2, 5, 5, 2, 0, 0]$

$49 : [2, 3, 9, 2, 2, 0], [2, 4, 7, 0, 0, 2], [2, 5, 6, 0, 2, 2]$

$50 : [2, 4, 7, 2, 2, 0], [2, 5, 5, 0, 0, 0]$

$51 : [2, 3, 9, 0, 2, 0]$

$52 : [2, 3, 9, 2, 0, 0], [2, 5, 6, 2, 0, 2], [2, 5, 6, 4, 0, 0]$

$53 : [2, 5, 6, 2, 2, 0]$

$54 : [2, 3, 9, 0, 0, 0], [2, 4, 7, 2, 0, 0], [2, 5, 6, 0, 0, 2], [2, 5, 7, 4, 2, 2]$

$55 : [2, 3, 10, 2, 2, 0], [2, 5, 6, 0, 2, 0], [2, 5, 7, 4, 0, 2]$

$56 : [2, 4, 7, 0, 0, 0], [2, 4, 8, 4, 0, 0]$

$57 : [2, 3, 10, 0, 2, 0]$

$58 : [2, 3, 10, 2, 0, 0], [2, 4, 8, 2, 2, 0], [2, 5, 6, 2, 0, 0], [2, 5, 7, 0, 2, 2]$

$60 : [2, 3, 10, 0, 0, 0], [2, 4, 9, 4, 2, 0], [2, 5, 6, 0, 0, 0]$

$61 : [2, 5, 7, 2, 0, 2]$

$62 : [2, 4, 8, 2, 0, 0], [2, 5, 7, 4, 0, 0]$

$63 : [2, 5, 7, 0, 0, 2], [2, 5, 7, 2, 2, 0]$

$64 : [2, 4, 8, 0, 0, 0]$

$66 : [2, 4, 9, 2, 2, 0]$

$67 : [2, 5, 8, 4, 2, 0]$

$68 : [2, 4, 9, 0, 2, 0], [2, 4, 10, 4, 2, 0], [2, 5, 7, 2, 0, 0]$

$70 : [2, 4, 9, 2, 0, 0], [2, 5, 7, 0, 0, 0]$

$72 : [2, 4, 9, 0, 0, 0], [2, 4, 10, 4, 0, 0], [2, 5, 8, 4, 0, 0]$

$74 : [2, 4, 10, 2, 2, 0]$

$76 : [2, 4, 10, 0, 2, 0]$

$77 : [2, 5, 9, 4, 2, 0]$

$78 : [2, 4, 10, 2, 0, 0], [2, 5, 8, 2, 0, 0]$

$80 : [2, 4, 10, 0, 0, 0], [2, 4, 11, 4, 0, 0], [2, 5, 8, 0, 0, 0]$

$82 : [2, 4, 11, 2, 2, 0], [2, 5, 9, 4, 0, 0]$

$83 : [2, 5, 9, 2, 2, 0]$

$85 : [2, 5, 9, 0, 2, 0]$

$86 : [2, 4, 11, 2, 0, 0]$

$87 : [2, 5, 10, 4, 2, 0]$

$88 : [2, 4, 11, 0, 0, 0], [2, 4, 12, 4, 0, 0], [2, 5, 9, 2, 0, 0]$

$90 : [2, 4, 12, 2, 2, 0], [2, 5, 9, 0, 0, 0]$

$92 : [2, 4, 13, 4, 2, 0], [2, 5, 10, 4, 0, 0]$

$93 : [2, 5, 10, 2, 2, 0]$

$94 : [2, 4, 12, 2, 0, 0]$

$95 : [2, 5, 10, 0, 2, 0]$

$96 : [2, 4, 12, 0, 0, 0], [2, 4, 13, 4, 0, 0]$

$98 : [2, 4, 13, 2, 2, 0], [2, 5, 10, 2, 0, 0]$

$100 : [2, 4, 13, 0, 2, 0], [2, 4, 14, 4, 2, 0], [2, 5, 10, 0, 0, 0]$

$102 : [2, 4, 13, 2, 0, 0]$

$104 : [2, 4, 13, 0, 0, 0], [2, 4, 14, 4, 0, 0]$

$106 : [2, 4, 14, 2, 2, 0]$

$108 : [2, 4, 14, 0, 2, 0]$

$110 : [2, 4, 14, 2, 0, 0]$

$112 : [2, 4, 14, 0, 0, 0]$

Bibliografia

[1] John H.Conway *The Sensual Quadratic Form*,The Mathematical Association of America,1997

[2] Jean Pierre Serre *A Course in Arithmetic*,Springer,1996

[3] Leonard Eugene Dickson *Integers Represented by Positive Ternary Quadratic Forms*,The University of Chicago

[4] ,Leonard Eugene Dickson *Ternary Quadratic Forms and Congruences*,The Annals of Mathematics,1926-1927

[5] Burton W.Jones,Gordon Pall *Regular and Semi-Regular Positive Ternary Quadratic Forms*,1939

[6] William C.Jagy,Irving Kaplansky,Alexander Schiemann *There Are 913 Regular Ternary Forms*,1996

[7] John William Scott Cassels *Rational Quadratic Forms*,1981

[8] O.Timothy O'Meara *Introduction to Quadratic Forms*,1973

[9] John H.Conway *Universal Qaudratic Forms and the Fifteen Theorem*,1993

[10] Manjul Bhargava *On the Conway-Schneeberger Fifteen Theorem*