Università degli Studi Roma Tre
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Sintesi della Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Sulla differenza $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$

Candidato:
Nicolò Canali De Rossi

Relatore:
Prof. Francesco Pappalardi

Anno Accademico 2012/2013

La Teoria Analitica dei Numeri è una branca della Teoria dei Numeri che fa uso dell'analisi per studiare le proprietà degli interi. Ebbe inizio nella prima metà del '700 con Eulero che dimostrò l'infinitezza dei numeri primi con un nuovo metodo basato sull'identità

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} = \prod_{p \text{ primo}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

e sfruttando la divergenza della serie armonica, dimostrando inoltre che

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = +\infty.$$

La Teoria Toltiplicativa dei Numeri è un campo della Teoria Analitica dei Numeri che si focalizza nel dare stime asintotiche, soprattutto quelle riguardanti i numeri primi. Il primo risultato fondamentale di questa teoria fu una pubblicazione di Legendre (1798, poi migliorata nel 1808) nella quale si dava una formula di approssimazione per il numero di numeri primi minori di un dato numero. Denotando con $\pi(x)$ il numero di primi $\leq x$, Legendre affermò che, per valori di x grandi,

$$\pi(x) \text{ è circa uguale a } \frac{x}{\log x - B(x)}, \text{ dove } B(x) \simeq 1.08366\ldots.$$

Più tardi, nel 1849, Gauss comunicò a Encke di aver trovato una nuova (e migliore) approssimazione per $\pi(x)$ nella funzione $\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$, idea che Gauss aveva già avuto nel 1791 quando aveva appena 14 anni.

Entrambi i risultati risultarono poi essere veri, e trovarono riscontro nel principale risultato di tutta la teoria: il Teorema dei Numeri Primi, il quale afferma che

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \text{ cioè che } \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

Il primo risultato fondamentale per la dimostrazione di questo teorema fu dato da Chebyshev che introdusse due funzioni:

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p,$$

dove p è primo e $m \in \mathbb{N}$. Chebyshev provò che se $\lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x}$ esiste, allora deve essere uguale ad 1, e che il Teorema dei Numeri Primi è equivalente a:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Il passo decisivo di tutta la teoria arrivò con una pubblicazione di Riemann[1] nel 1859 (la "memoria" di Riemann): in questo breve articolo, tra l'altro l'unico tra i suoi scritti che riguardasse la teoria dei numeri, seguendo le idee di Dirichlet sulle L-serie e sui primi in progressione aritmetica di collegare problemi di natura aritmetica a funzioni continue, introdusse la cosiddetta funzione zeta di Riemann di variabile complessa

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Riemann provò due risultati principali riguardanti $\zeta(s)$, e presentò cinque congetture (una delle quali resta ancora oggi irrisolta), e servirono più di 30 anni prima che qualcuno riuscisse a dimostrarle. Grazie alla funzione ζ e alla distribuzione dei suoi zeri, nel 1896 Hadamard e de la Vallée Poussin mostrarono indipendentemente che $\psi(x) \sim x$, e quindi riuscirono a completare, dopo un secolo di lavoro dei migliori matematici dell'epoca, la dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi.

Quindi questo teorema ci dice che, quando x è grande, $\pi(x)$ trova delle buone approssimazioni nelle funzioni $\frac{x}{\log x}$ e $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$.

Il teorema dei numeri primi non ci dice però niente sulla differenza $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$, che per evidenza numerica venne congetturato essere sempre ≤ 0. Nel 1914 Littlewood dimostrò invece che questa differenza non solo non è sempre negativa, ma addirittura che cambia segno infinite volte, e che le sue oscillazioni divengono sempre più ampie al crescere di x, ed è proprio questo Teorema che vogliamo dimostrare in questo lavoro.

[1] "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" ("Sul numero di numeri primi minori di un valore dato")

Nel primo capitolo introdurremo alcune notazioni e risultati fondamentali della teoria analitica dei numeri: dalla funzione enumeratrice dei numeri primi alla formula delle somme parziali, tutti i risultati di questo capitolo saranno ripetutamente richiamati nel corso della tesi.

Definizione 1.2. Sia $x > 0$. Definiamo

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ primo}}} 1 = \#\{p \text{ primo} \mid p \leq x\},$$

$$\Pi(x) = \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m} = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + ...$$

Definizione 1.3. Per ogni $n \geq 1$ definiamo

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{se } n = p^m \text{ per qualche primo } p \text{ e } m \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definizione 1.4. Sia $x > 0$. Definiamo

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

Teorema 1.7. *Sia $f(n)$ una funzione moltiplicativa non identicamente nulla, tale che la serie $\sum_n f(n)$ sia assolutamente convergente. Allora*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + \dots).$$

Inoltre se f è completamente moltiplicativa si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)}.$$

Teorema 1.8. *Sia $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una successione di numeri reali, e sia $A(x) := \sum_{n \leq x} a_n$. Sia $f(x)$ una funzione con derivata prima continua in $(1-\epsilon, +\infty)$. Allora $\forall\, x \geq 1$ si ha*

$$\sum_{n \leq x} a_n f(n) = A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t) dt.$$

Ricorderemo inoltre alcune proprietà delle funzioni intere di ordine finito, e mostreremo il Teorema di Hadarmard che ci permetterà di dedurre l'infinità degli zeri non banali di $\zeta(s)$.

Definizione 1.15. Sia $f(z)$ una funzione intera. Diciamo che f ha ordine finito se esiste $\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ t.c. $f(z) = O(e^{|z|^\alpha})$ per $|z| \to \infty$. Definiamo l'**ordine di** f come $\inf\{\alpha | f(z) = O(e^{|z|^\alpha})$ per $|z| \to \infty\}$.

Proposizione 1.16. *Sia $f(z)$ una funzione intera senza zeri. Se esistono C ed α, e $0 < R_1 < R_2 < ...$ con $\lim_{m\to\infty} R_m = \infty$ tali che*

$$|f(z)| < Ce^{|z|^\alpha} \textit{ quando } |z| \in R_1, R_2, ...,$$

allora esiste un polinomio $g(z)$ tale che $f(z) = e^{g(z)}$. In questo caso $f(z)$ è di ordine finito, e il suo ordine è uguale al grado di $g(z)$, che quindi è un intero.

Teorema 1.17. *Sia $f(z)$ una funzione intera di ordine finito, con $f(0) \neq 0$. Siano $z_1, z_2, z_3, ...$ gli zeri di f, ordinati in modo tale che $|z_i| = r_i \leq r_{i+1}$. Sia $n(r) = \#\{k \mid |z_k| \leq r\}$. Allora*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|d\theta - \log|f(0)| = \log\frac{R^n}{|z_1|\cdots|z_n|} = \int_0^R \frac{n(r)}{r}dr,$$

dove $|z_i| \leq R\ \forall i = 1, ..., n$.

Corollario 1.18. *Sia $f(z)$ una funzione intera di ordine finito δ e sia $\alpha > \delta$. Inoltre, sia $z_1, z_2, z_3, ...$ la sequenza dei suoi zeri (ordinati) t.c. $|z_i| = r_i$. Allora*

(i) $n(R) = O(R^\alpha)$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^\alpha}$ *converge.*

Teorema 1.19. *Sia $f(z)$ una funzione intera di ordine 1, con uno zero di ordine K nell'origine, e sia $z_1, z_2, ...$ la sequenza dei suoi zeri non nulli. Allora*

$$f(z) = z^K e^{A+Bz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}}.$$

Corollario 1.20. *Sia $f(z)$ una funzione intera di ordine 1, $f(0) \neq 0$, e sia $z_1, z_2, z_3, ...$ la sequenza dei suoi zeri (ordinati) t.c. $|z_i| = r_i$. Allora*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{1+\epsilon}}$ *converge.*

(ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n}$ *converge* $\Rightarrow |f(z)| \le e^{C|z|}$.

Nel secondo capitolo studieremo la funzione ζ di Riemann e alcune delle sue proprietà più importanti. Partiremo dalla definizione come serie di Dirichlet:

Definizione 2.1. Sia $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $\Re s > 1$. Definiamo

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Lemma 2.2. *La serie* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ *è assolutamente convergente per ogni* $s \in \mathbb{C}$ *con* $\sigma > 1$.

Continueremo con alcune identità che legheranno $\zeta(s)$ con le funzioni introdotte nel primo capitolo.

Proposizione 2.3.

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$ *con* $\sigma > 1$. *Valgono inoltre le seguenti identità:*

$$\log \zeta(s) = \sum_{p,m} \frac{1}{mp^{ms}} \quad (\sigma > 1),$$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad (\sigma > 1)$$

Proposizione 2.4. *Sia* $\sigma > 1$. *Allora*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx,$$

$$\log \zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{\Pi(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Mostreremo poi gli unici risultati dimostrati da Riemann stesso nella sua memoria: il primo ci dice che $\zeta(s)$ può essere prolungata su tutto il piano complesso come funzione meromorfa avente come unica singolarità un polo semplice in $s = 1$. Il secondo è invece l'equazione funzionale.

Teorema 2.5. $\zeta(s)$ *ammette un prolungamento analitico sul semipiano* $\sigma > 0$, *avente un polo semplice in* $s = 1$ *con residuo* 1.

Teorema 2.6. *Sia* $0 < \delta < 1$. *Allora*

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &< A \log t && (\sigma \geq 1, t \geq 2), \\ |\zeta'(s)| &< A \log^2 t && (\sigma \geq 1, t \geq 2), \\ |\zeta(s)| &< A(\delta)\, t^{1-\delta} && (\sigma \geq \delta, t \geq 1). \end{aligned}$$

Teorema 2.7. $\zeta(s)$ *non ha zeri sulla retta* $\sigma = 1$. *Inoltre*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = O((\log t)^A), \text{ con } \sigma \geq 1 \text{ e } t \to +\infty$$

Teorema 2.8. *La funzione* $\zeta(s)$ *ammette un prolungamento analitico su tutto il piano complesso, avente come unica singolarità un polo semplice in* $s = 1$ *con residuo* 1. *Inoltre* $\zeta(s)$ *soddisfa l'equazione funzionale*

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma(\frac{1}{2}(1-s))\zeta(1-s)\ \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Passeremo poi allo studio degli zeri di $\zeta(s)$, introducendo la funzione ausiliaria $\xi(s)$ e sfrutteremo le proprietà della sua espansione come prodotto infinito per dedurre la loro infinità: tutti questi risultati, dimostrati da Hadamard nel 1893, giocarono un ruolo fondamentale nelle dimostrazioni del Teorema dei Numeri Primi di Hadamard e de la Vallée Puoissin.

Teorema 2.11. *La funzione*

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\zeta(s)$$

è intera e soddisfa

$$\xi(1-s) = \xi(s).$$

Inoltre $\xi(s)$ *è reale sulle rette* $t = 0$ *e* $\sigma = \frac{1}{2}$, *e* $\xi(0) = \xi(1) = \frac{1}{2}$.

Teorema 2.12. *(i) Gli zeri di* $\xi(s)$ *(se esistono) sono tutti situati nella striscia* $0 \leq \sigma \leq 1$, *e sono simmetrici rispetto alle rette* $t = 0$ *e* $\sigma = \frac{1}{2}$.

(ii) Gli zeri di $\zeta(s)$ *sono identici (in posizione e ordine di molteplicità) a quelli di* $\xi(s)$, *ad eccezione degli zeri semplici di* $\zeta(s)$ *nei punti* $s = -2, -4, -6, \ldots$.

(iii) $\xi(s)$ *non ha zeri sull'asse reale.*

Teorema 2.13. *Sia* $M(r)$ *il massimo di* $|\xi(s)|$ *sul cerchio* $|s| = r$. *Allora quando* $r \to \infty$,

$$\log M(r) \sim \frac{r}{2}\log r.$$

Teorema 2.14. *$\xi(s)$ ha un'infinità di zeri, generalmente denotati con ρ. Inoltre, la serie $\sum_\rho |\rho|^{-\alpha}$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$. Il prodotto di Hadamard per $\xi(s)$ è della forma*

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_\rho \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}},$$

dove A e B sono costanti. Valgono inoltre le seguenti:

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = B + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right),$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = B - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{1}{2}s+1) + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Teorema 2.15. *Esiste una costante positiva A tale che $\zeta(s)$ non ha zeri nel dominio*

$$\sigma > 1 - \frac{A}{\log(|t|+2)}.$$

In seguito ci occuperemo di studiare in dettaglio la distribuzione degli zeri di $\zeta(s)$, e in particolare quella delle loro parti immaginarie.

Definizione 2.20. Denoteremo con $N(T)$, dove $T > 0$, il numero di zeri $\rho = \beta + i\gamma$ (necessariamente finito) di $\zeta(s)$ nel rettangolo $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < T$.

Teorema 2.21. *Quando $T \to +\infty$,*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

Nell' ultimo capitolo mostreremo delle formule esplicite per le funzioni $\psi_1(x)$ e $\psi_0(x)$, che ci aiuteranno a derivare delle stime per $\psi_1(x)$, $\psi(x)$ e $\pi(x)$.

Definizione 3.1. Definiamo con

$$\psi_1(x) = \int_0^x \psi(u)du = \int_1^x \psi(u)du = \sum_{n\leq x}(x-n)\Lambda(n).$$

Lemma 3.2. *Se k è un intero positivo, $c > 0$, e $y > 0$, allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y^s ds}{s(s+1)...(s+k)} = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{y}\right)^k & y > 1 \end{cases}$$

Proposizione 3.3. *Si ha che*

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) ds, \ (x > 0, c > 1),$$
$$\frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) = \int_0^\infty \frac{\psi_1(x)}{x^{s+2}} dx, \ (\sigma > 1).$$

Teorema 3.4. *Esiste una sequenza di numeri $T_2, T_3, ...$, tali che $m < T_m < m+1$ $(m = 2, 3, ...)$ e $\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| < A\log^2 t$ $(-1 \le \sigma \le 2, \ t = T_m)$.*

Teorema 3.5. *Nella regione $D \subset \mathbb{C}$ ottenuta rimuovendo dal semipiano $\sigma \le -1$ l'interno dei cerchi di raggio $\frac{1}{2}$ e centri in $s = -2, -4, -6, ...$, e cioè la regione definita da $\sigma \le -1$, $|s - n| \ge \frac{1}{2}$ $(n = -2, -4, -6, ...)$ si ha*

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| < A\log(|s| + 1).$$

Teorema 3.6. *Se $x \ge 1$, allora*

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sum_\rho \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - x\frac{\zeta'}{\zeta}(0) + \frac{\zeta'}{\zeta}(-1) - \sum_{r=1}^\infty \frac{x^{1-2r}}{2r(2r-1)}.$$

In seguito troveremo un'altra formula esplicita, enunciata da Riemann nel 1860, ma dimostrata solo nel 1895 da Von Mangoldt, che esprime $\psi(x)$ come una somma sugli zeri della funzione $\zeta(s)$.

Definizione 3.8. Definiamo

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2}(\lim_{t\to x^-} \psi(t) + \lim_{t\to x^+} \psi(t)).$$

$\psi_0(x)$ differisce da $\psi(x)$ solo quando $x = p^m$, in qual caso $\psi_0(x) = \psi(x) - \frac{1}{2}\log p$.

Teorema 3.9. *Se $c > 0, y > 0$ allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y^s}{s} ds = \begin{cases} 0 & (y < 1), \\ \frac{1}{2} & (y = 1), \\ 1 & (y > 1), \end{cases}$$

dove, l'integrale va interpretato come il limite per $T \to +\infty$ di

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds.$$

Inoltre, se $I(y) = I(y,T) + \Delta(y,T)$, *allora per* $T > 0$

$$\begin{aligned}|\Delta(y,T)| &< \begin{cases} \frac{y^c}{\pi T|\log y|} & (y \neq 1), \\ \frac{c}{\pi T} & (y = 1), \end{cases} \\ |\Delta(y,T)| &< y^c \qquad\qquad (\textit{sempre}).\end{aligned}$$

Teorema 3.10. *Se* $x > 1$, *allora*

$$\psi_0(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

dove

$$\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} = \lim_{T\to+\infty} \sum_{|\gamma|\leq T} \frac{x^\rho}{\rho} = \lim_{T\to+\infty} S(x,T).$$

Inoltre se

$$\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} = S(x,T) + R(x,T),$$

allora per $x > 1, T > 3$ *si ha*

$$\begin{aligned}|R(x,T)| &< \begin{cases} A\frac{x^3}{x-1}\left(\frac{\log^2 T}{T} + \frac{1}{T\xi}\right) & (x \neq p^m), \\ A\frac{x^3}{x-1}\frac{\log^2 T}{T} & (x = p^m), \end{cases} \\ |R(x,T)| &< A\frac{\log^2 T}{T} + A\log x \qquad (\textit{sempre}),\end{aligned}$$

dove $\xi = \xi(x)$ *è la distanza di* x *dal più vicino* p^m.

Definizione 3.11. Definiamo Θ come l'estremo superiore delle parti reali degli zeri di $\zeta(s)$.

Definizione 3.12. Definiamo il logaritmo integrale come

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Questa definzione può essere estesa

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_0^{1+\epsilon} \frac{dt}{\log t}\right),$$

notando che

$$\mathrm{Li}(x) = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2),$$

dove $\mathrm{li}(2) = 1.04...$

Teorema 3.13. *Sia* Θ *definito come nella Definzione 3.11. Allora:*

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^{\Theta+1}),\\ \psi(x) &= x + O(x^{\Theta}\log^2 x),\\ \pi(x) &= \mathrm{li}(x) + O(x^{\Theta}\log x).\end{aligned}$$

Definizione 3.14. Se f e g sono due funzioni. Scriveremo che:

$$\begin{aligned}f(x) = \Omega_+(g(x)) &\Leftrightarrow \limsup_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} > 0\\ f(x) = \Omega_-(g(x)) &\Leftrightarrow \liminf_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} < 0\end{aligned}$$

$\Omega_\pm$ denoterà entrambi Ω_+ e Ω_-.

Teorema 3.15. *Sia* $\delta > 0$*. Allora:*

$$\begin{aligned}\psi(x) - x &= \Omega_\pm(x^{\Theta-\delta})\\ \Pi(x) - \mathrm{li}(x) &= \Omega_\pm(x^{\Theta-\delta}).\end{aligned}$$

Poniamo

$$P(x) = \pi(x) - \mathrm{li}(x),\ Q(x) = \Pi(x) - \mathrm{li}(x),\ R(x) = \psi(x) - x.$$

Dal Teorema 3.15 segue subito che $Q(x)$ e $R(x)$ cambiano segno infinite volte mentre x tende a infinito. Siccome il legame di $\zeta(s)$ con $\pi(x)$ è meno diretto di quello con $\Pi(x)$ e $\psi(x)$, il problema di $P(x)$ è più complicato. Ponendo $M = [\log x/\log 2]$, si ha che

$$Q(x) - P(x) = \sum_{m=2}^{M}\frac{\pi(x^{\frac{1}{m}})}{m} = \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + O(Mx^{\frac{1}{3}}) \sim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\log x},$$

e quindi

$$P(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\log x}\left(-1 + Q(x)\frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}}} + o(1)\right).$$

Ora il termine -1 potrebbe far pensare che $P(x)$ sia sempre negativa, così come come suggeriscono i calcoli numerici...ma non è così. Infatti se $\Theta > \frac{1}{2}$, dal Teorema 3.15 segue che

$$\liminf_{x\to\infty} Q(x)\frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}}} = -\infty,\ \limsup_{x\to\infty} Q(x)\frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}}} = +\infty,$$

e perciò che $P(x)$ cambia segno infinite volte. Ma tutto ciò non funziona se $\Theta = \frac{1}{2}$. Per mostrarlo cominceremo enunciando alcuni risultati generali di Dirichlet, e di Phragmén-Lindelöf. Considerando poi la formula esplicita per $\psi_0(x)$ e assumendo l'ipotesi d Riemann, sostituiremo i denominatori $\rho = 1/2 + i\gamma$ della serie $\sum x^\rho/\rho$ con $i\gamma$, e quindi tutta la serie sarà approssimata da

$$2x^{\frac{1}{2}} \sum_{\gamma>0} \frac{\sin(\gamma \log x)}{\gamma} = 2x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\gamma_n \log x)}{\gamma_n}.$$

Questa serie, privata del fattore $2x^{\frac{1}{2}}$, è formalmente uguale a $-\Im G(i \log x)$, dove

$$G(s) = G(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n s}}{\gamma_n},$$

e quello che vogliamo è mostrare che

$$\limsup_{t\to\infty} \Im G(it) = +\infty, \ \liminf_{t\to\infty} \Im G(it) = -\infty.$$

Una volta fatto ciò, dimostreremo che $\psi(x) - x = \Omega_\pm(x^{\frac{1}{2}} \log\log\log x)$, e il Teorema di Littlewood seguirà facilmente.

Proposizione 3.16. *Siano $\theta_1, ..., \theta_N$ numeri reali, e q un intero positivo. Allora in ogni intervallo della forma*

$$\tau \le t \le \tau q^N, \ (\tau > 0)$$

esiste un numero t tale che ognuno dei prodotti

$$t\theta_1, ..., t\theta_N$$

differisce da un intero per meno di $\frac{1}{q}$.

Teorema 3.17. *Sia D il dominio definito da*

$$D = \{s = \sigma + it \in \mathbb{C} | t > t_0, \ g_1(t) < \sigma < g_2(t)\},$$

dove g_1 e g_2 sono due funzioni continue che soddisfano

$$\alpha_1 \le g_1(t) < g_2(t) \le \alpha_2, \ (t \ge t_0),$$

con α_1 e α_2 costanti. Supponiamo che $f(s)$ sia regolare in D e continua in D' (cioè D con il suo bordo), e che soddisfi su tutto D' una disuguaglianza della forma

$$|f(s)| < Ke^{e^{ct}}, \ \textit{dove } 0 < c < \frac{\pi}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

con K e c costanti. Allora se

$$|f(s)| \leq C$$

vale su tutti i punti del bordo di D, vale anche su tutti i punti nell'interno di D.

Lemma 3.18. *Ad ogni ϵ positivo corrisponde $\sigma_1 = \sigma_1(\epsilon)$ positivo tale che, se $0 < \sigma < \sigma_1$, $T_0 > 0$, l'intervallo*

$$T_0 \leq T < T_0 e^{(\frac{1}{\sigma})^{1+\epsilon}}$$

contiene un numero $T = T(\epsilon, \sigma, T_0)$ con la proprietà che

$$|G(\sigma + it + iT) - G(\sigma + it)| < \epsilon \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lemma 3.19. *Se $s = \sigma + it = re^{i\theta}$ $(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ allora*

$$\Im G(s) = -\frac{\theta}{2\pi} \log \frac{1}{\sigma} + O(1),$$

quando $r \to 0$ (θ fissato).

Lemma 3.20. *Se $0 < c < \frac{1}{4}$, allora per ogni $\sigma > 0$ sufficientemente piccolo, i.e. per $0 < \sigma < \sigma_0 = \sigma_0(c)$, esiste un $t' = t'(c, \sigma)$ e un $t'' = t''(c, \sigma)$ tali che*

$$t' > e^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \Im G(\sigma + it') > +c \log \log t',$$
$$t'' > e^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \Im G(\sigma + it'') < -c \log \log t''.$$

Lemma 3.21. *Se $0 < \sigma \leq 1$ allora*

$$|G(s)| < A \left(\log \frac{1}{\sigma} + 1 \right)^2.$$

Teorema 3.22. $\psi(x) - x = \Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{2}} \log \log \log x)$

Teorema di Littlewood.

$$\Pi(x) - \mathrm{li}(x) = \Omega_{\pm} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\log x} \log \log \log x \right)$$
$$\pi(x) - \mathrm{li}(x) = \Omega_{\pm} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\log x} \log \log \log x \right)$$

Il Teorema di Littlewood, per il quale Littlewood diede una bozza di dimostrazione nel 1914, ma che poi fu dimostrato in dettaglio da Hardy e Littlewood nel 1918, ci dice quindi che la differenza $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ cambia segno infinite volte, e che inoltre le oscillazioni divengono sempre più ampie al crescere di x. La dimostrazione originale dipendeva fortemente sul principio di Phragmén-Lindelöf, (Ingham, nel 1936, fornì una dimostrazione che non dipendeva da tale principio) e non dava nessuna indicazione numerica per trovare la posizione del primo cambio di segno di $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$. Skewes riuscì a mostrare, prima assumendo l'ipotesi di Riemann (1933), e poi negandola (1955), che esiste $\Xi < \exp(\exp(\exp(\exp(7.705))))$ tale che $\pi(\Xi) - \mathrm{li}(\Xi) > 0$, e per questo Ξ è detto numero di Skewes. In seguito, nel 1966 Lehman ridusse il limite superiore a 1.65×10^{1165}. Usando gli stessi metodi, te Riele (1989) mostrò che la differenza è positiva per almeno 10^{180} interi consecutivi nell'intervallo $[6.627... \times 10^{370}, 6.687... \times 10^{370}]$. Più recentemente, Bays e Hudson (2000) abbassarono ancora il limite superiore a $1.398... \times 10^{316}$, stima che venne subito migliorata da Chao e Plymen, Saouter e Demichel, e infine da Zegowitz, che lo ridusse a $e^{727.951\cdots}$. Per quanto riguarda il limite inferiore di Ξ, nel 1962 Rosser e Schoenfeld provarono che Ξ si trova al di sopra di 10^8. Brent migliorò tale risultato nel 1975 portandolo a 8×10^8, e successivamente Kotnik arrivò a 10^{14}. Anche questa stima è stata di molto alzata con l'aiuto dei computer ma, ancora oggi, il valore esatto del numero di Skewes resta a noi sconosciuto.

Bibliografia

[1] L. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1979.

[2] T.M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 2010.

[3] R. Ash. *Complex Variables*. Dover Publications, 2nd edition, 2007.

[4] R.P. Brent. Irregularities in the distribution of primes and twin primes. *Mathematics of Computation*, 26(129):43–56, 1975.

[5] H. Davenport and H.L. Montgomery. *Multiplicative Number Theory*. Springer, 3rd edition, 2000.

[6] Y. Saouter; P. Demichel. A sharp region where $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ is positive. *Mathematics of Computation*, 79(272):2395–2405, 2010.

[7] H.M. Edwards. *Riemann's Zeta Function*. Dover Publications, 2001.

[8] C. Bays; R.H. Hudson. A new bound for the smallest x with $\pi(x) > \mathrm{li}(x)$. *Mathematics of Computation*, 69(231):1285–1296, 1990.

[9] A.E. Ingham. A note on the distribution of primes. *Acta Arithmetica*, 1:201–211, 1936.

[10] A.E. Ingham. *The Distribution of Prime Numbers*. Cambridge University Press, 1990.

[11] S. Knapowski. On sign-changes of the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$. *Acta Arithmetica*, 7:107–119, 1962.

[12] T. Kotnik. The prime-counting function and its analytic approximations. *Advances in Computational Mathematics*, 29(1):55–70, 2008.

[13] S. Lang. *Complex Analysis*. Springer, 4th edition, 1998.

[14] R. Sherman Lehmann. On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$. *Acta Arithmetica*, 11:397–410, 1966.

[15] J.E. Littlewood. Sur la distribution des nombres premiers. *Comptes Rendus*, (158):1869–1872, 1914.

[16] J.E. Littlewood and G.H. Hardy. Contributions to the theory of the riemann zeta function and the theory of the distribution of primes. *Acta Math.*, 41:119–196, 1918.

[17] H.L. Montgomery and R.C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory.* Cambridge University Press, 2006.

[18] W. Narkiewicz. *The Development of Prime Number Theory : From Euclid to Hardy and Littlewood.* Springer, 2000.

[19] K.F. Chao; R. Plymen. A new bound for the smallest x with $\pi(x) > \mathrm{li}(x)$. *International Journal of Number Theory*, 6(3):681–690, 2010.

[20] J.B. Rosser; L. Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *llinois Journal of Mathematics*, 6:64–94, 1962.

[21] S. Skewes. On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$. *Journal of the London Mathematical Society*, (8):277–283, 1933.

[22] S. Skewes. On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$. *Proceedings of the London Mathematical Society*, (5):48–70, 1955.

[23] H.J.J. te Riele. On the sign difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$. *Mathematics of Computation*, 48(177):323–328, 1987.

[24] G. Tenenbaum. *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory.* Cambridge University Press, 1995.

[25] E. Titchmarsh. *The Theory of the Riemann Zeta-Function.* Oxford University Press, 2nd edition, 1987.

[26] E.T. Whittaker and G.N. Watson. *A Corse of Modern Analysis.* Cambridge University Press, 4th edition, 1963.

[27] S. Zegowitz. On the positive region of $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$. 2010.