Università degli Studi Roma Tre

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Il problema di Waring e il metodo del cerchio

Candidato

Daniela Betti

Relatore

Prof. Francesco Pappalardi

Anno Accademico 2012-2013

Ottobre 2013

Sintesi

Nel 1770 nelle sue *Meditationes Algebricae* Edward Waring affermava che ogni intero è la somma di al più nove cubi, o di al più 19 biquadrati e che leggi simili si possono trovare per qualsiasi grado. Questo problema oggi è noto come il problema di Waring e in termini più moderni potremmo riformularlo nel modo seguente: per ogni $k \geq 3$ esiste un numero s tale che ogni intero positivo è la somma di al più s potenze k*-esime* di interi positivi e tale più piccolo numero $g(k)$ soddisfa $g(3) = 9$ e $g(4) = 19$.
Waring affermava l'esistenza di questo numero $g(k)$ per ogni k, ma non dava alcuna dimostrazione della sua esistenza, né mostrava di conoscere una legge per calcolarne il valore. Per più di un secolo le ricerche dei matematici non sono riuscite a far altro che dimostrare l'esistenza di $g(k)$ per dei valori di k particolari: all'inizio del Novecento era stata provata l'esistenza di $g(k)$ solo per $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10$.

Nel 1909 David Hilbert è riuscito a trovare una soluzione al problema di Waring dimostrando l'esistenza di $g(k)$ per ogni k in [13], pochi anni più tardi i due matematici inglesi Godfrey Harold Hardy e John Edensor Littlewood riuscivano a dare una nuova soluzione del problema di Waring in [7], fornendo anche una formula asintotica per il numero di rappresentazioni di un intero n come somma di potenze k*-esime* e una stima della funzione $G(k)$: il minimo

intero t tale che ogni intero sufficientemente grande può essere scritto come la somma di al più t potenze *k-esime* di interi positivi.
Il metodo di dimostrazione elaborato da Hardy e Littlewood oggi è noto con il nome di *metodo del cerchio* e ha dato risultati notevoli anche applicato ad altri problemi di Teoria dei Numeri legati alla decomposizione di interi in parti di tipo particolare, ad esempio Vinogradov l'ha utilizzato per dimostrare il Teorema dei tre primi in [25].

Vaughan e Wooley in [22] sottolineano come sia impegnativo calcolare il valore della funzione $G(k)$ e come ancora poco sia noto al riguardo, nonostante risulti essere ben più interessante della funzione $g(k)$, in quanto quest'ultima è influenzata dalla difficoltà di rappresentare alcuni interi particolari.
È chiaro che $G(k) \leq g(k)$, le Tabelle 1 e 2 mostrano i valori di $g(k)$ e i limiti superiori ad oggi noti per $G(k)$, per $k \leq 10$.

Tabella 1: Valori di $g(k)$

k	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(k)$	9	19	37	73	143	279	548	1079

Tabella 2: Limiti superiori per $G(k)$

k	3	5	6	7	8	9	10
$G(k)$	7	17	24	33	42	50	59

Vacca ha dimostrato che per scrivere l'intero $n = 2^k[(3/2)^k] - 1$ come somma di potenze *k-esime* sono necessari almeno $2^k[(3/2)^k] + 2^k - 2$ termini e ha mostrato che n si può rappresentare come somma di $[(3/2)^k] - 1$ potenze *k-esime* di 2 e $2^k - 1$ unità, quindi $g(k) \geq 2^k[(3/2)^k] + 2^k - 2$.

Il valore di $G(k)$ è stato determinato solo per due valori di k: Lagrange ha dimostrato che $G(2) = 4$ e Davenport che $G(4) = 16$.

Il primo capitolo della tesi illustra le ricerche sul problema di Waring dalla fine del Settecento ad oggi. Viene data anche una dimostrazione elementare dell'esistenza di $g(k)$ dovuta a Yuri Vladimirovich Linnik.
Tale dimostrazione si basa sul concetto di densità di Schnirelmann.

Definizione 1.1 (Densità di Schnirelmann). *Sia A una successione crescente dei numeri naturali, sia $A(n)$ il numero di interi positivi appartenenti ad A e minori uguali di n.*
La densità di Schnirelmann dell'insieme A, $\delta(A)$, è l'estremo inferiore della successione $\{A(n)/n\}$:

$$\delta(A) = \inf_{n \geq 1} \left\{ \frac{A(n)}{n} \right\}.$$

Definizione 1.2. *Un insieme A di interi non negativi è una base di ordine k se ogni intero positivo può essere scritto come la somma di esattamente k elementi di A. L'insieme A è una base di ordine finito se A è una base di ordine k per qualche k.*

Il teorema seguente, dovuto a Schnirelmann, caratterizza le basi di ordine finito.

Teorema 1.3 (di Schnirelmann). *Se $\delta(A) > 0$, allora esiste k tale che A è una base di ordine k.*

In [18] Linnik dimostra che la successione A_k delle potenze *k-esime* degli interi positivi è una base di ordine finito, dimostrando che ha densità di Schnirelmann positiva.

Nel secondo capitolo viene illustrata l'idea originale del metodo del cerchio. Data la funzione:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^k}$$

elevando alla potenza *s-esima* si ottiene

$$f^s(z) = \sum_{n_1}\sum_{n_2} .... \sum_{n_s} z^{n_1^k+n_2^k+...n_s^k} = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} r(N) z^N$$

quindi il coefficiente $r(N)$ conta i modi di scrivere N come somma di s potenze *k-esime*.

Per il teorema di Cauchy:

$$r(N) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{[f(z)]^s}{z^{N+1}} dz$$

dove Γ rappresenta la circonferenza centrata nell'origine e con raggio $R = 1-1/N$. Hardy e Littlewood in [7] e [8] sono riusciti a stimare l'integrale, dividendo la circonferenza Γ in archi e approssimando opportunamente la funzione $f(z)$ lungo tali archi.

Nel terzo e quarto capitolo viene data una soluzione del problema di Waring utilizzando il metodo del cerchio con le semplificazioni dovute a Vinogradov: invece della funzione $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^k}$ si considerano le somme parziali

$$f_M(z) = \sum_{n\le M} z^{n^k}$$

per $M \ge [N^{\frac{1}{k}}]$. Si ha:

$$[f_M(z)]^s = \sum_{n\le sN} r'(n) z^n,$$

perciò per $n \le N$:

$$r'(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{[f_M(z)]^s}{z^{n+1}} dz.$$

La funzione $r'(n)$ non ha singolarità sulla circonferenza unitaria, per cui si può effettuare la sostituzione $z = e^{2\pi i\alpha}$:

$$r'(n) = \int_0^1 \frac{[f_M(e(\alpha))]^s}{e(n\alpha)} d\alpha.$$

Per $n \leq N$, $r'(n) = r(n)$ e ponendo

$$T(\alpha) = \sum_{x \leq P} e(\alpha x^k)$$

con $P = [N^{\frac{1}{k}}]$, si avrà

$$T(\alpha)^s = \sum_{n \leq sN} r(n) e(n\alpha),$$

così che

$$r(N) = \int_0^1 (T(\alpha))^s e(-N\alpha) d\alpha.$$

dove $r(n)$ rappresenta il numero di rappresentazioni di n come somma di s potenze *k-esime*, per ogni $n \leq N$.

Per la scelta degli archi si segue la trattazione di Davenport in [3].
Si considera l'intervallo $[0, 1]$ e intorno ad ogni razionale a/q con $(a, q) = 1$ e $1 \leq a \leq q$, per $q \leq P^\delta$, si prende l'intervallo $\mathfrak{M}_{a,q}$:

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{P^{k-\delta}}$$

Gli intervalli $\mathfrak{M}_{a,q}$ costituiscono l'insieme $\mathfrak{M}$ degli archi maggiori e il loro complementare in $[0, 1]$ costituisce l'insieme $\mathfrak{m}$ degli archi minori.
Per studiare il comportamento della funzione lungo gli archi minori si utilizzano le disuguaglianze di Weyl e di Hua, di cui è data dimostrazione nel terzo capitolo della tesi.

Lemma 3.7 (Disuguaglianza di Weyl). *Sia $f(x)$ un polinomio reale di grado k i cui coefficienti α_k soddisfino la condizione:*

$$\left|\alpha_k - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2},$$

con $(a,q) = 1$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$S = \sum_{x=1}^{P} e(f(x)) \ll P^{1+\varepsilon} q^{\varepsilon} \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{q} + \frac{q}{P^k}\right)^{2^{1-k}}.$$

Lemma 3.9 (Disuguaglianza di Hua). *Sia*

$$T(\alpha) = \sum_{x \leq P} e(\alpha x^k)$$

si ha:

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^{2^k} d\alpha \ll P^{2^k - k + \varepsilon}$$

per ogni $\varepsilon > 0$ fissato.

Grazie a queste disuguaglianze si può dimostrare il teorema seguente.

Teorema 4.1. *Sia $s \geq 2^k + 1$. Si ha*

$$\int_{\mathfrak{m}} |T(\alpha)|^s d\alpha \ll P^{s-k-\delta'}$$

con δ' positivo che dipende da δ.

Per quel che riguarda gli archi maggiori, si mostra che su un arco maggiore

$$T(\alpha) = \frac{S_{a,q}}{q} \int_0^P e(\beta \xi^k) d\xi + O(P^{2\delta}),$$

con

$$S_{a,q} = \sum_{x=1}^{q} e_q(a x^n)$$

e che per $s \geq 2^k + 1$, si ha

$$\int_{\mathfrak{M}} T(\alpha)^s e(-N\alpha) d\alpha = P^{s-k} \mathfrak{S}(P^\delta, N) J(P^\delta) + O(P^{s-k-\delta'}),$$

dove

$$\mathfrak{S}(P^\delta, N) = \sum_{\substack{a,q \leq P^\delta \\ (a,q)=1}} \left(\frac{S_{a,q}}{q} \right)^s e\left(-N\frac{a}{q} \right)$$

$$J(P^\delta) = \int_{|\gamma| \leq P^\delta} \left(\int_0^1 e(\gamma \xi^k) d\xi \right)^s e(-\gamma) d\gamma.$$

La serie

$$\mathfrak{S} = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a<q \\ (a,q)=1}} \left(\frac{S_{a,q}}{q} \right)^s e\left(-N\frac{a}{q} \right)$$

è detta *serie singolare* del problema di Waring.

L'integrale

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 e(\gamma \xi^k) d\xi \right)^s e(-\gamma) d\gamma$$

è detto *integrale singolare* per il problema di Waring.

Viene dimostrato che la serie e l'integrale singolare possono essere sostituiti a $\mathfrak{S}(P^\delta, N)$ e $J(P^\delta)$, ottenendo una formula asintotica per il numero di rappresentazioni di N come somma di potenze *k-esime*.

Lemmma 4.4. *Sia $s \geq 2^k + 1$. Si ha:*

$$r(N) = C_{s,k} N^{\frac{s}{k}-1} \mathfrak{S}(N) + O(N^{\frac{s}{k}-1-\delta})$$

con

$$C_{s,k} = \frac{\Gamma(1+1/k)^s}{\Gamma(s/k)} > 0.$$

Il quinto capitolo della tesi è dedicato allo studio della serie singolare. Viene dimostrato che la serie singolare converge e che per $s \geq 4k$, $\mathfrak{S} \gg 1$. Questo vuol dire che il termine principale nella formula asintotica è $\gg N^{\frac{s}{k}-1}$

e quindi il numero di rappresentazioni di N come somma di s potenze *k-esime* tende a infinito per $s \geq 2^k + 1$. Come conseguenza di ciò abbiamo il seguente teorema.

Teorema 5.15. *Si ha* $G(k) \leq 2^k + 1$.

Il fatto che $\mathfrak{S} \gg 1$ per $s \geq 4k$ significa che non ci sono problemi nell'estendere la validità della formula asintotica per quel che riguarda la serie singolare, il vero problema sono gli archi minori.

Nel sesto capitolo viene data una stima migliore di $G(k)$, dovuta a Vinogradov [26].

Si considera la seguente rappresentazione di N:

$$N = x_1^k + ... + x_s^k + u + u' + y^k v$$

dove

- u, u' sono somma di un numero l fissato di potenze *k-esime*

- v è la somma di un numero l_0 fissato di potenze *k-esime*

- y un intero minore uguale di $P^{\frac{1}{2k}}$.

Il lemma seguente, di Hardy e Littlewood, garantisce che ci siano abbastanza interi esprimibili come somma di un numero fissato l di potenze *k-esime.*

Lemma 6.2. *Sia $U_l(N)$ il numero di interi minori di N esprimibili come somma di l potenze k-esime di interi positivi. Si ha, per $N > N_0(k, l)$*

$$U_l(N) \gg N^{1-(1-\frac{1}{k})^l}.$$

Si definiscono gli archi maggiori $\mathfrak{M}_{a,q}$ nel seguente modo: dati a, q tali che $(a,q) = 1$ e $1 \leq a \leq q$, si prendono gli intervalli

$$|\alpha - a/q| \leq 1/2kP^{k-1}$$

per $q \leq P^{\frac{1}{2}}$.

Per $k \geq 3$ e $P = [N^{\frac{1}{k}}]$, si dimostra che su un arco maggiore

$$T(\alpha) = \frac{S_{a,q}}{q} \int_0^P e(\beta\xi^k)d\xi + O(q),$$

con le notazioni precedentemente introdotte.

Si ottiene così che

$$\int_{\mathfrak{M}} T(\alpha)^s e(-N\alpha)d\alpha = \frac{\Gamma(1+1/k)^s}{\Gamma(s/k)} P^{s-k}\mathfrak{S}(N) + O(P^{s-k-1}).$$

Per valutare il contributo degli archi minori è fondamentale il seguente risultato di Vinogradov sulle somme trigonometriche.

Lemma 6.1 (di Vinogradov). *Sia dato un insieme di X_0 interi distinti contenuti in un intervallo di lunghezza X e un insieme di Y_0 interi distinti contenuti in un intervallo di lunghezza Y. Siano x,y elementi del primo e del secondo insieme rispettivamente.*

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\alpha = \frac{a}{q} + O(q^{-2})$$

con $(a,q) = 1$, $q > 1$. Si ha:

$$\left| \sum_x \sum_y e(\alpha xy) \right|^2 \ll X_0 Y_0 \frac{\log q}{q}(q+X)(q+Y).$$

Definendo

$$S(\alpha) = \sum_y \sum_v e(\alpha y^k v),$$

come conseguenza del lemma di Vinogradov, si ha che per α appartenente ad un arco minore

$$|S(\alpha)| \ll Y_0 V_0 P^{-\frac{1}{4k}+\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{k})^{l_0}}.$$

Posto

$$R(\alpha) = \sum_{u} e(\alpha u),$$

il contributo degli archi minori è dato dal lemma seguente.

Lemma 6.4. *Siano* $l_0 \geq 2k \log 2k$ *e* $l \geq 2k \log 3k$. *Si ha*

$$\int_{\mathfrak{m}} |T(\alpha)|^s \, |R(\alpha)|^2 \, |S(\alpha)| \, d\alpha \ll P^{3k} U_0^2 Y_0 V_0 P^{-\delta}.$$

Si dimostra che il contributo degli archi minori è trascurabile rispetto a quello degli archi maggiori.

Lemma 6.8. *Si ha*

$$\int_{\mathfrak{M}} T(\alpha)^s R(\alpha)^2 S(\alpha) e(-N\alpha) d\alpha \gg P^{3k}.$$

Si può quindi dimostrare il seguente limite superiore per $G(k)$.

Teorema 6.9. *Si ha*

$$G(k) < 10k + 6k \log k + 3.$$

Bibliografia

[1] H. Davenport. On Waring's problem for fourth powers. *Ann. Math. (2)*, 40:731–747, 1939.

[2] H. Davenport. *Multiplicative Number Theory. 2nd edition.* Springer Verlag, 1980.

[3] H. Davenport. *Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities. Edited and prepared by T. D. Browning. With a preface by R. C. Vaughan, D. R. Heath-Brown and D. E. Freeman. 2nd ed.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press. xx, 140 p. , 2005.

[4] L. E. Dickson. *History of the theory of numbers. Vol. II: Diophantine analysis.* Dover Publications, New York, 1920.

[5] L. E. Dickson. Proof of the ideal Waring theorem for exponents 7-180. *Am. J. Math.*, 58:521–529, 1936.

[6] L. E. Dickson. Solution of Waring's problem. *Am. J. Math.*, 58:530–535, 1936.

[7] G. H. Hardy e J. E. Littlewood. A new solution of Waring's problem. *Quart. J. Math. Oxford*, (48):272–293, 1920.

[8] G. H. Hardy e J. E. Littlewood. Some problems of 'Partitio Numerorum'. A new solution of Waring's Problem. *Göttingen Nachrichten*, pp. 33–54, 1920.

[9] G. H. Hardy e J. E. Littlewood. Some problems of 'Partitio Numerorum' IV. The singular series in Warings problem and the value of the number $G(k)$. *Math. Zeitschr.*, 12:161–188, 1922.

[10] G. H. Hardy e J. E. Littlewood. Some problems of 'Partitio Numerorum' VI: Further Researches in Waring's Problem. *Math. Zeitschr.*, 23:1–37, 1925.

[11] G. H. Hardy e S. Ramanujan. Asymptotic formulae in combinatory analysis. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(17):75–115, 1918.

[12] G. H. Hardy e E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers, 5th edition*. Oxford University Press, 1979.

[13] D. Hilbert. Beweis für Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl nter Potenzen Waringsche Problem. *Math. Ann.*, 67:281–300, 1909.

[14] L. K. Hua. *Additive theory of prime numbers.* Translations of Mathematical Monographs. 13. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). xiii, 190 pp., 1965.

[15] L. K. Hua. *Introduction to number theory. Transl. from the Chinese by Peter Shiu.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. XVIII, 572 pp., 14 figs. DM 96.00, 1982.

[16] A.Ya. Khinchin. *Three pearls of number theory. Translation from the second, revised Russian ed. (1948) by F. Bagemihl, H. Komm and W. Seidel.* Rochester, N. Y.: Graylock Press 64 p., 1952.

[17] J. M. Kubina e M.C. Wunderlich. Extending Waring's conjecture to 471.600.000. *Math. Ann.*, 144:224–238, 1961.

[18] Yu.V. Linnik. An elementary solution of the problem of Waring by Schnirelman's method. *Mat. Sb., Nov. Ser.*, 12:225–230, 1943.

[19] K. Mahler. On the fractional parts of the powers of a rational number (ii). *Mathematika*, 4:122–124, 1957.

[20] Ivan Niven. An unsolved case of the Waring problem. *Am. J. Math.*, 66:137–143, 1944.

[21] R. C. Vaughan. *The Hardy –Littlewood Method, 2nd edition.* Cambridge University Press, 1997.

[22] R. C. Vaughan e T. D. Wooley. Waring's problem: a survey. Bennett, M. A. (ed.) et al., Number theory for the millennium III. Proceedings of the millennial conference on number theory, Urbana-Champaign, IL, USA, May 21–26, 2000. Natick, MA: A K Peters. 301-340 (2002), 2002.

[23] I. M. Vinogradov. An asymptotic formula for the number of representations in Waring's problem. *Rec. Math. Moscou*, 42:531–534, 1935.

[24] I. M. Vinogradov. On Waring's Problem. *Annals of Mathematics*, 36(2):395–405, 1935.

[25] I. M. Vinogradov. Representation of an odd number as a sum of three primes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, (15):6–7, 1937.

[26] I. M. Vinogradov. *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. Translated, revised and annotated by K. F. Roth and Anne.* New York: Interscience Publishers Inc. X, 180 p., 1954.

[27] E.T. Whittaker e G.N. Watson. *A course of modern analysis. An introduction to the general theory on infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions. 4th ed., reprinted.* Cambridge: At the University Press. 608 p., 1962.

[28] T. D. Wooley. New estimates for smooth Weyl sums. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 51(1):1–13, 1995.