UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Una Dimostrazione della Congettura Ternaria di Goldbach - Sintesi -

Candidato
Giordano Santilli

Relatore
Prof. Francesco Pappalardi

Anno Accademico 2013/2014
Ottobre 2014

Nel 1742 il matematico prussiano Christian Goldbach scrisse ad Eulero riguardo ad una congettura, da lui ideata. Eulero la riformulò in chiave moderna, affermando che

Congettura (**Congettura Forte, Pari o Binaria di Goldabach**).
Ogni numero pari maggiore di 2 può essere espresso come somma di due numeri primi.

Una versione più semplice di questo enunciato, chiamata Congettura Debole o Ternaria di Goldbach afferma che:

Congettura (**Congettura Debole, Dispari o Ternaria di Goldbach**).

Ogni numero dispari maggiore di 5 può essere espresso come somma di tre numeri primi.

Oppure nella formulazione equivalente:

Congettura.
Ogni numero dispari maggiore di 7 può essere espresso come somma di tre numeri primi dispari.

Chiaramente questa seconda versione esclude solo il caso $7 = 2 + 2 + 3$. Risulta chiaro che la Congettura Binaria di Goldbach implica quella Debole.

La nascita della Congettura di Goldbach, come abbiamo visto, è risalente al Settecento, ma solo nel Novecento è diventata oggetto di studio approfondito per i matematici. Questo fu dovuto anche grazie al discorso di Hilbert nel 1900 in occasione del Secondo Congresso Internazionale di Matematica, in cui espose i suoi famosi 23 problemi per il millennio. La Congettura di Goldbach era parte del problema 8: dimostrare l'Ipotesi di Riemann.
Nel 1921, in un discorso ad un convegno a Copenaghen, il matematico inglese Hardy definì la Congettura di Goldbach "non solo uno dei problemi più famosi e complicati in teoria dei numeri, ma anche per l'intera matematica". Tuttavia, nel 1923 lo stesso Hardy, insieme al collega Littlewood, dimostrò che ogni intero dispari abbastanza grande è la somma di tre numeri primi dispari e che quasi tutti i numeri pari sono somma di due numeri primi, assumendo che l'Ipotesi Generalizzata di Riemann sia valida [HL23].
Solo nel 1937, il matematico russo Vinogradov riuscì a dimostrare che ogni numero dispari da un certo punto in poi può essere scritto come somma di tre numeri primi senza utilizzare l'Ipotesi di Riemann, ma lasciando questo valore come una costante impossibile da calcolare [Vin37]. Solo due anni più tardi, nel 1939, un suo allievo, Borodzin, calcolò che questa costante fosse

uguale a $3^{3^{15}} \approx 10^{6846169}$.
Lo stesso metodo di Vinogradov è stato usato negli anni per cercare di abbassare questa soglia ad un limite calcolabile sperimentalmente dalle macchine, per cui nel 1989 Wang e Chen abbassarono il limite a 10^{43000} [JT89], mentre nel 2012 Liu e Wang migliorarono questo risultato, abbassando ulteriormente il valore a $e^{3100} \approx 2 \cdot 10^{1346}$ [LW02].
Nel 1997, Deshouillers, Effinger, Te Riele e Zinoviev riuscirono a mostrare che, assumendo l'Ipotesi di Riemann Generalizzata, la Congettura Dispari di Goldbach è vera incondizionatamente per ogni numero dispari, mostrando anche una verifica sperimentale per tutti i numeri fino a 10^{20} [DETRZ97].
Un altro tipo di strategia nella dimostrazione della congettura consiste nel vedere quanti numeri primi bisogna sommare per ottenere ogni numero dispari. Il primo risultato in questo senso fu ottenuto nel 1930 da Schnirelmann, che dimostrò che ogni numero intero era somma di al più C numeri primi, dove C è effettivamente calcolabile ed è detta, appunto, costante di Schnirelmann [Sch30].
Negli anni il valore di questa costante è stato ampliamente migliorato: lo stesso Schnirelmann dimostrò che $3 \leq C \leq 800000$ [Sch30]. Dopo una serie di valori intermedi, nel 1977 Deshouillers mostrò che $C = 26$ ([Des75]), mentre Riesel e Vaughan nel 1983 provarono che $C = 19$ [RV83]. I migliori risultati ottenuti finora sono stati quelli di Ramaré del 1995, che dimostrò che ogni numero pari maggiore di 4 può essere espresso come somme di al più 6 numeri primi ([Ram95], e quello di Terence Tao del 2012, che provò che ogni numero dispari è al più somma di cinque numeri primi [Tao14], assegnando a C il valore 5.
Un altro tipo di approccio al problema è stato quello di trovare un modo per verificare sperimentalmente la congettura al computer fino ad un certo limite L. Il valore del 1997 di $L = 10^{20}$ di Deshouillers, Effinger, Te Riele e Zinoviev è stato migliorato da Saouter l'anno successivo, mostrando che $L = 10^{22}$ [Sao98]. Per quanto riguarda la Congettura Binaria di Goldbach, invece, Oliveira e Silva, Harzog e Pardi, la calcolarono vera fino a $4 \cdot 10^{18}$ [OeSHP13].
In questa tesi, tuttavia, faremo riferimento al lavoro del professor Helfgott, che, partendo dal metodo di Vinogradov, è riuscito a dimostrare vera la Congettura Debole di Goldbach per tutti i numeri maggiori di 10^{27} [Hel13, Hel14a, Hel14b], mentre in un articolo complementare ha provato sperimentalmente che ogni numero dispari fino a $8.875 \cdot 10^{30}$ è esprimibile come somma di tre numeri primi [HP13]. Questo ha portato ad una dimostrazione completa e non dipendente dall'Ipotesi di Riemann della Congettura Ternaria di Goldbach.

Lo scopo principale di questo lavoro è presentare i risultati contenuti proprio in questi articoli per giungere alla formulazione di un teorema che dimostri la Congettura di Goldbach, evidenziando in particolare le innovazioni rispetto alle dimostrazioni classiche.

Nel primo capitolo presenteremo la Congettura Debole di Goldbach e i principali risultati raggiunti nel corso degli anni. Illustreremo, quindi, i principali concetti della Teoria dei Numeri e dell'Analisi Matematica che utilizzeremo nel corso del lavoro. Iniziamo, dando la definizione di alcune funzioni fondamentali per lo studio della Teoria dei Numeri.

Definizione (1.1). Per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(s) > 1$, definiamo la funzione *Zeta di Riemann*, come

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Definizione (1.2). Per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(s) > 0$, definiamo la funzione *Gamma*, come

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Definiamo, quindi, la nozione di carattere, dalla quale deriviamo i caratteri di Dirichlet, che useremo per costruire le L-serie di Dirichlet ed esporre l'Ipotesi di Riemann Generalizzata.

Definizione (1.3). Sia G un gruppo abeliano. Definiamo $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ un *carattere* se χ è un omomorfismo.

Definizione (1.4). Un *Carattere di Dirichlet* $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ modulo q è un carattere χ_1 di $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ sollevato in $\mathbb{Z}$ con le seguenti proprietà:

1. χ è periodico modulo q, cioè $\chi(n+q) = \chi(n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
2. χ è una funzione totalmente moltiplicativa, cioè $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ per tutti gli $n, m \in \mathbb{Z}$.
3. $\chi(n) \neq 0$ se e solo se $(n, q) = 1$

Quindi per convenzione si definisce

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi_1(n) & \text{se } (n,q) = 1 \\ 0 & \text{se } (n,q) > 1. \end{cases}$$

Sempre per convenzione, esiste un Carattere di Dirichlet modulo $q = 1$, detto il *carattere banale* $\chi_T : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definito come $\chi_T(n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Se χ è un carattere modulo q e χ' è un carattere modulo $q' \mid q$ tale che $\chi(n) = \chi'(n)$ per tutti gli n coprimi con q, diciamo che χ' *induce* χ. Un Carattere di Dirichlet si dice *primitivo* se non è indotto da nessun carattere di modulo più piccolo. Il carattere modulo q indotto dal carattere banale χ_T è detto *carattere principale* e viene indicato con χ_0, cioè

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } (n,q) = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché l'insieme dei caratteri modulo q forma un gruppo rispetto alla moltiplicazione definita come $\chi_1\chi_2(n) = \chi_1(n)\chi_2(n)$, viene naturale considerare il *carattere inverso* $\overline{\chi}$ di un dato carattere χ, definito come $\overline{\chi}(n) = \overline{\chi(n)}$.

Ci sono importanti relazioni che riguardano le somme di Caratteri di Dirichlet.

Proposizione (1.2). *Sia $q \in \mathbb{Z}$. Allora valgono le seguenti relazioni:*

1. *Per ogni Carattere di Dirichlet χ modulo q*

$$\sum_{a=1}^{q} \chi(a) = \begin{cases} \phi(q) & \textit{se } \chi = \chi_0 \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

2. *Per ogni $a \in \mathbb{Z}$*

$$\sum_{\chi \bmod q} \chi(a) = \begin{cases} \phi(q) & \textit{se } a \equiv 1 \pmod q \\ 0 & \textit{altrimenti,} \end{cases}$$

dove la somma è su tutti i Caratteri di Dirichlet modulo q.

3. *Per ogni coppia di caratteri χ_1 e χ_2 modulo q*

$$\sum_{a=1}^{q} \chi_1(a)\overline{\chi_2(a)} = \begin{cases} \phi(q) & \textit{se } \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

4. *Per ogni coppia $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$*

$$\sum_{\chi \bmod q} \chi(a_1)\overline{\chi(a_2)} = \begin{cases} \phi(q) & \textit{se } a_1 \equiv a_2 \pmod q \ \textit{e } (a_1,q) = 1 \\ 0 & \textit{altrimenti,} \end{cases}$$

dove la somma è sutti i Caratteri di Dirichlet modulo q.

Definizione (1.5). Dato un carattere χ modulo q, definiamo la sua *L-serie di Dirichlet* come

$$L(s,\chi) = \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Uno *zero non banale* di $L(s,\chi)$ è un $s \in \mathbb{C}$ tale che $L(s,\chi) = 0$ e $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Se $\chi(-1) = 1$, allora $L(s,\chi)$ possiede degli zeri in corrispondenza di tutti gli interi pari negativi, mentre se $\chi(-1) = -1$, $L(s, chi)$ ha degli zeri in tutti gli interi dispari negativi. Questi zeri sono detti *zeri banali.* La retta $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ è detta *retta critica.*

Congettura (Ipotesi di Riemann Generalizzata)**.** L'*Ipotesi di Riemann Generalizzata* per le L-serie di Dirichlet (GRH) afferma che per ogni carattere χ, tutti gli zeri non banali di $L(s,\chi)$ giacciono sulla retta critica.

Definiamo ora delle funzioni aritmetiche moltiplicative che saranno di importanza fondamentale per lo sviluppo della tesi.

Definizione (1.6). Dato un intero positivo n, definiamo $\phi(n)$ come il numero degli interi tra 1 e n, coprimi con n. Abbiamo anche la seguente formula: se $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{e_s}$

$$\phi(n) = \left(p_1^{e_1} - p_1^{e_1-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_s^{e_s} - p_s^{e_s-1}\right).$$

Questa funzione è chiamata *Funzione di Eulero.*

Definizione (1.7). Dato un numero intero positivo n, definiamo la somma di tutti i suoi divisori positivi come

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Definizione (1.8). Sia $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{e_s}$ la fattorizzazione di un numero intero n. Allora

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^s & \text{se } n \geq 2 \text{ e } e_1 = \cdots = e_s = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione μ è chiamata *Funzione di Moebius.*

Definizione (1.9). Per ogni $n \geq 1$ definiamo la *Funzione di Von Mangoldt* come:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{se } n = p^k \text{ per qualche primo } p \text{ e qualche intero } k \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Proposizione (1.3). *Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ una funzione moltiplicativa non identicamente uguale a zero. Allora*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \prod_{p \ primo} \left(1 + f(p) + f(p^2) + f(p^3) + \dots\right),$$

se la serie a sinistra è assolutamente convergente.

Definiamo ora le Somme di Gauss e una particolare serie di Somme di Gauss, detta Somma di Ramanujan, evidenziando i risultati più importanti che li riguardano.

Definizione (1.10). Siano $b \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ e χ un Carattere di Dirichlet modulo q, definiamo la *Somma gaussiana* come

$$\tau(\chi, b) = \sum_{a \bmod q} \chi(a) e\left(\frac{ab}{q}\right).$$

Chiamiamo $\tau(\chi) = \tau(\chi, 1)$.

Lemma (1.1). *Sia χ un carattere primitivo modulo q. Allora $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$.*

Lemma (1.2). *Sia χ^* un carattere primitivo modulo q^* e χ un carattere modulo q indotto da χ^* con $q^* \mid q$. Allora*

$$\tau(\chi) = \mu\left(\frac{q}{q^*}\right) \chi^*\left(\frac{q}{q^*}\right) \tau(\chi^*).$$

Definizione (1.11). Sia q un numero intero, allora definiamo la *Somma di Ramanujan*

$$c_q(n) := \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e\left(\frac{an}{q}\right).$$

Lemma (1.3). *Vale la seguente formula:*

$$c_q(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d|q}} \mu\left(\frac{q}{d}\right) d$$

Lemma (1.4). *Per ogni $q, n \in \mathbb{Z}$ vale la seguente uguaglianza*

$$c_q(n) = \frac{\phi(q)}{\phi\left(\frac{q}{(q,n)}\right)} \mu\left(\frac{q}{(q,n)}\right).$$

Infine, enunciamo il Crivello Largo, uno dei risultati più importanti della Teoria dei Numeri, ed alcune proposizioni collegate.

Definizione (1.12). Sia $n \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$, diciamo che $\Delta = \Delta(N, \delta) > 0$ soddisfa la *Disuguaglianza di Crivello Largo* per N e δ se per ogni $M \in \mathbb{Z}$ e per ogni$\{a_n\} \in \mathbb{C}$, definita

$$S(\alpha) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha),$$

allora per ogni $R \in \mathbb{Z}^+$ e per ogni $\alpha_1, \ldots, \alpha_R \in \mathbb{R}$, tali che $|\alpha_r - \alpha_s| \geq \delta$ abbiamo, per tutti gli $r \neq s$,

$$\sum_{r=1}^{R} |S(\alpha_r)| \leq \Delta \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2.$$

La migliore costante per il Crivello Largo trovata finora è dovuta a Selberg e raffinata da Montgomery, [Mon78].

Proposizione (1.4). *La Disuguaglianza di Crivello Largo è valida per* $\Delta = N + \delta^{-1} - 1$.

Un risultato che deriva dal crivello e che useremo in seguito è la seguente disuguaglianza dovuta sempre a Montgomery, [IK04, §7.4].

Proposizione (1.5). *Per ogni intero positivo q senza fattori quadratici, otteniamo che*

$$h(q)|S(0)|^2 \leq \sum_{a \bmod q} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2,$$

dove $h(q)$ è una funzione moltiplicativa, definita sui numeri primi come:

$$h(p) = \frac{\omega(p)}{p - \omega(p)},$$

dove per ogni primo p, $\omega(p)$ è il numero di classi h modulo p, per le quali $a_n = 0$, se $n \equiv h \pmod p$.

Per quanto riguarda gli strumenti di Analisi, useremo spesso delle formule per lo studio delle sommatorie.

Lemma (1.5). *Date $\{f_n\}, \{g_n\}$ due successioni di funzioni in $\mathbb{C}$, allora vale la seguente formula:*

$$\sum_{k=m}^{n} f_k(g_{k+1} - g_k) = [f_{n+1}g_{n+1} - f_m g_m] - \sum_{k=m}^{n} g_{k+1}(f_{k+1} - f_k).$$

Lemma (1.6). *Sia $\{a_k\} \in \mathbb{C}$ una successione e $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ una funzione continua con derivata continua. Definiamo $A(N) = \sum_{k=1}^{N} a_k$, allora:*

$$\sum_{k=1}^{N} a_k f(k) = A(N)f(N) - \int_1^N A(x)f'(x)\,dx.$$

Richiamiamo ora la Trasformata di Fourier ed una serie di stime che la riguardano.

Definizione (1.13). Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Allora la sua *Trasformata di Fourier* su $\mathbb{R}$ è la seguente:

$$\widehat{f(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e(-xt)f(x)\,dx.$$

Analogamente, è possibile passare da una Trasformata di Fourier alla funzione di partenza tramite la relazione:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)e(xt)\,dx.$$

Lemma (1.7). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e sia $\widehat{f}$ la sua Trasformata di Fourier. Allora:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k).$$

Teorema (1.1). *Per ogni $f \in L_1 \cap L_2$, indicata con $\hat{f}$ la sua Trasformata di Fourier, vale la seguente uguaglianza:*

$$|f|_2 = |\hat{f}|_2,$$

dove con $|f|_2$ si indica la norma L^2 di f.

Lemma (1.8). *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è una funzione a supporto compatto, derivabile k volte, allora*

$$\widehat{f}(t) = O\left(\frac{|\widehat{f^{(k)}}|_\infty}{(2\pi t)^k}\right) = O\left(\frac{|f^{(k)}|_1}{(2\pi t)^k}\right).$$

Lemma (1.9). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a supporto compatto e continua e sia $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ allora*

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e(\alpha n)\right| \leq \min\left(|f|_1 + \frac{1}{2}|f'|_1, \frac{|f'|_1}{2|\sin(\pi\alpha)|}\right)$$

Lemma (1.10). *Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1, a supporto compatto. Allora*

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e(\alpha n)\right| \leq \frac{|\widehat{f''}|_\infty}{4\left(\sin(\pi\alpha)\right)^2},$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Presentiamo ora i concetti di Trasformata di Mellin ed alcuni risultati collegati ad essa, che utilizzeremo nel corso della tesi.

Definizione (1.14). La *Trasformata di Mellin* di una funzione $\phi : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ è:

$$M\phi(s) = \int_0^\infty \phi(x)x^{s-1}\,dx$$

Per la Trasformata di Mellin vale un analogo del Teorema di Plancherel, riconducendosi alla Trasformata di Fourier.

Lemma (1.11). *Sia f una funzione continua e integrabile. Sia $s = \sigma + it$ e definiamo $g(x) = f(e^{-x})e^{-x\sigma}$ tale che $g \in L_1 \cap L_2$. Allora*

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|x^{2\sigma}\frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} |Mf(s)|^2\,dt.$$

Definizione (1.15). Date $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ a supporto compatto e integrabili, definiamo la *convoluzione moltiplicativa* tra f e g, la funzione

$$f *_M g(x) = \int_0^\infty f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

Lemma (1.12). *Se f e g sono due funzioni per cui è possibile definire la loro trasformata di Mellin, allora:*

$$M(f *_M g)(s) = Mf(s)\cdot Mg(s).$$

Proposizione (1.6). *Date delle funzioni f e g per cui esistono le loro trasformate di Mellin ed un $s = \sigma + it$, valgono le seguenti relazioni:*

$$M\left(f'(t)\right)(s) = -(s-1)Mf(s-1),$$

$$M\left(tf'(t)\right)(s) = -sMf(s),$$

$$M\left(\log t\cdot f(t)\right) = (Mf)'(s),$$

$$M(f\cdot g)(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Mf(z)Mg(s-z)\,dz.$$

Infine, sempre nel primo capitolo, inizieremo a lavorare sulla congettura in maniera classica, dividendo la somma da stimare con il metodo del cerchio e cominceremo ad analizzare il contributo degli Archi Maggiori. Quello che vogliamo fare è studiare la somma

$$S_\eta(\alpha, x) = \sum_n \Lambda(n) e(\alpha n) \eta\left(\frac{n}{x}\right), \tag{1}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, Λ è la funzione di Von Mangoldt e $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è tale che la somma converga. Vogliamo stimare dal basso la quantità

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=N} \Lambda(n_1)\Lambda(n_2)\Lambda(n_3)\eta_1\left(\frac{n_1}{x}\right)\eta_2\left(\frac{n_2}{x}\right)\eta_3\left(\frac{n_3}{x}\right), \tag{2}$$

dove $\eta_1, \eta_2, \eta_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Nel metodo del cerchio, l'integrale su $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ viene diviso in due insiemi, di cui ora diamo la definizione.

Definizione (1.16). Definiamo l'insieme degli *Archi Maggiori* $\mathfrak{M}$ come l'insieme degli intervalli $\mathfrak{M}_{r_0}$ in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ attorno al numero razionale $\frac{a}{q}$, $q \leq r_0$, dove c e r_0 sono costanti e $(a, q) = 1$, cioè

$$\mathfrak{M}_{r_0} = \left(\frac{a}{q} - \frac{cr_0}{qx}, \frac{a}{q} + \frac{cr_0}{qx}\right).$$

La definizione che utilizzeremo di insieme di Archi Maggiori è

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\delta_0,Q_0} = & \bigcup_{\substack{q \leq Q_0 \\ q \text{ dispari}}} \bigcup_{\substack{a \bmod q \\ (a,q)=1}} \left(\frac{a}{q} - \frac{\delta_0 Q_0}{2qx}, \frac{a}{q} + \frac{\delta_0 Q_0}{2qx}\right) \cup \\ & \bigcup_{\substack{q \leq 2Q_0 \\ q \text{ pari}}} \bigcup_{\substack{a \bmod q \\ (a,q)=1}} \left(\frac{a}{q} - \frac{\delta_0 Q_0}{qx}, \frac{a}{q} + \frac{\delta_0 Q_0}{qx}\right),\end{aligned} \tag{3}$$

dove $\delta_0 > 0$ e $r \geq 1$ sono valori che assegneremo in seguito.

Definizione (1.17). Il complementare dell'insieme degli Archi Maggiori in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è detto insieme degli *Archi Minori* e si indica con $\mathfrak{m}$, cioè

$$\mathfrak{m} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus \mathfrak{M}.$$

Valgono inoltre le seguenti formule: per $\chi = \chi_T$, dove χ_T è il carattere banale

$$S_{\eta,\chi}\left(\frac{\delta}{x}, x\right) = S\left(\frac{\delta}{x}, x\right) = \widehat{\eta}(-\delta)x + O\left(\mathrm{err}_{\eta,\chi_T}(\delta, x)\right)x, \tag{4}$$

mentre per ogni χ primitivo, diverso da quello banale si ha che

$$S_{\eta,\chi}\left(\frac{\delta}{x}, x\right) = O\left(\mathrm{err}_{\eta,\chi}(\delta, x)\right) x, \tag{5}$$

dove i termini di errore err, saranno definiti in seguito.

Proposizione (1.7). *Sia $\eta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione in $L_1 \cap L_\infty$. Sia $S_\eta(\alpha, x)$ definita come in (1) e $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\delta_0,r}$ come in (3).*
Sia $\eta_\circ : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tre volte derivabile e tale che $\eta_\circ^{(3)} \in L_1$. Supponiamo, inoltre, che $r \geq 182$. Allora

$$\int_{\mathfrak{M}} |S_\eta(\alpha, x)|^2 \, d\alpha = L_{r,\delta_0} \cdot x + O\left(5.19\delta_0 xr \left(ET_{\eta,\frac{\delta_0 r}{2}}\left(|\eta|_1 + \frac{ET_{\eta,\frac{\delta_0 r}{2}}}{2}\right)\right)\right)$$
$$+ O\left(\delta_0 r \left(\log 2e^2 r\right)\left(x \cdot E^2_{\eta,r,\delta_0} + K_{r,2}\right)\right), \tag{6}$$

dove

$$E_{\eta,r,\delta_0} = \max_{\substack{\chi \bmod q \\ q \leq r \cdot \mathrm{MCD}(q,2) \\ |\delta| \leq \mathrm{MCD}(q,2)\frac{\delta_0 r}{2q}}} \sqrt{q}|\mathrm{err}_{\eta,\chi^*}(\delta, x)|, \tag{7}$$

$$ET_{\eta,s} = \max_{|\delta| \leq s} |\mathrm{err}_{\eta,\chi_T}(\delta, x)|, \tag{8}$$

$$K_{r,2} = (1 + \sqrt{2r})(\log x)^2 |\eta|_\infty \left(2\frac{|S_\eta(0, x)|}{x} + (1 + \sqrt{2r})(\log x)^2 \frac{|\eta|_\infty}{x}\right) \tag{9}$$

e L_{r,δ_0} soddisfa sia

$$L_{r,\delta_0} \leq 2|\eta|_2^2 \sum_{\substack{q \leq r \\ q \text{ dispari}}} \frac{\mu^2(q)}{\phi(q)}, \tag{10}$$

che

$$L_{r,\delta_0} = 2|\eta_\circ|_2^2 \sum_{\substack{q \leq r \\ q \text{ dispari}}} \frac{\mu^2(q)}{\phi(q)} + O\left(\log r + 1.7\right)\left(2|\eta_\circ|_2 \cdot |\eta - \eta_\circ|_2 + |\eta_\circ - \eta|_2^2\right)$$
$$+ O\left(\frac{2|\eta_\circ^{(3)}|_1^2}{5\pi^6 \delta_0^5}\right)\left(0.64787 + \frac{\log r}{4r} + \frac{0.425}{r}\right). \tag{11}$$

Proposizione (1.8). *Sia $x \geq 1$. Siano $\eta_+, \eta_* : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Siano $\eta_+ \in C^2$, $\eta_+'' \in L_2$ e $\eta_+, \eta_* \in L^1 \cap L^2$. Sia $\eta_\circ : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ derivabile tre volte tranne che* *per un numero finito di punti. Supponiamo* $\eta_0^{(3)} \in L_1$ *e* $|\eta_+ - \eta_\circ|_2 < \epsilon_0 |\eta_\circ|_2$, *dove* $\epsilon_0 \geq 0$. *Siano* $\delta_0 > 0$, $r \geq 1$. *Allora per ogni* $N > 0$,

$$\int_{\mathfrak{M}} S_{\eta_+}(\alpha, x)^2 S_{\eta_*}(\alpha, x) e(-N\alpha)\, d\alpha$$

è uguale a:

$$C_0 C_{\eta_\circ,\eta_*} x^2$$

$$+ \left(2.82643 |\eta_\circ|_2^2 (2+\epsilon_0)\epsilon_0 + \frac{4.31004 |\eta_\circ|_2^2 + 0.0012 \frac{|\eta_\circ^{(3)}|_1^2}{\delta_0^5}}{r} \right) |\eta_*|_1 x^2 \tag{12}$$

$$+ O\left(E_{\eta_*,r,\delta_0} A_{\eta_+} + E_{\eta_+,r,\delta_0} 1.6812 \left(\sqrt{A_{\eta_+}} + 1.6812 |\eta_+|_2 \right) |\eta_*|_2 \right) \cdot x^2 \tag{13}$$

$$+ O\left(2 Z_{\eta_+^2,2}(x) LS_{\eta_*}(x,r) x + 4 \sqrt{Z_{\eta_+^2,2}(x) Z_{\eta_*^2,2}(x)} LS_{\eta_+}(x,r) x \right), \tag{14}$$

dove

$$C_0 = \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \dot{\prod}_{p\nmid N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right), \tag{15}$$

$$C_{\eta_\circ,\eta_*} = \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_\circ(t_1)\eta_\circ(t_2)\eta_*\left(\frac{N}{x} - (t_1+t_2)\right) dt_1\, dt_2, \tag{16}$$

$$E_{\eta,r,\delta_0} = \max_{\substack{\chi \bmod q \\ q \leq \mathrm{MCD}(q,2) r \\ |\delta| \leq \mathrm{MCD}(q,2)\delta_0 r/2q}} \sqrt{q} |\mathrm{err}_{\eta,\chi^*}(\delta, x)|,$$

$$ET_{\eta,s} = \max_{|\delta| \leq s/q} |\mathrm{err}_{\eta,\chi_T}(\delta, x)|,$$

$$A_\eta = \frac{1}{x} \int_{\mathfrak{M}} |S_{\eta_+}(\alpha, x)|^2\, d\alpha, \tag{17}$$

$$Z_{\eta,k}(x) = \frac{1}{x} \sum_n \Lambda^k(n) \eta\left(\frac{n}{x}\right), \tag{18}$$

$$LS_\eta(x,r) = \log r \max_{p \leq r} \sum_{\alpha \geq 1} \eta\left(\frac{p^\alpha}{x}\right), \tag{19}$$

dove E_{η,r,δ_0} *è definito come in* (7) *e* $ET_{\eta,s}$ *come in* (8) *ed* $err_{\eta,\chi}(\delta, x)$ *ed* $err_{\eta,\chi_T}(\delta, x)$ *sono i termini di errore delle formule* (4) *e* (5).

Nel secondo capitolo, quindi, ci concentreremo sull'analisi degli Archi Minori, partendo dal Teorema di Vaughan per spezzare la somma da studiare in quattro somme più piccole e analizzarle separatamente. Cruciale per le stime di questo capitolo, sarà l'utilizzo di stime trigonometriche e l'applicazione del

Crivello Largo nella formulazione di Montgomery. Infine, esporremo il Teorema Principale di Approssimazione per gli Archi Minori.
In questo capitolo ci occuperemo della stima della somma

$$S_\eta(\alpha, x) = \sum_n \Lambda(n) e(\alpha n) \eta\left(\frac{n}{x}\right), \tag{20}$$

sull'insieme degli Archi Minori $\mathfrak{m}$, dove, in questo caso, $\eta = \eta_2(t) = 2\chi_{[\frac{1}{2},1]} *_M 2\chi_{[\frac{1}{2},1]}(t)$.
Per iniziare l'analisi della serie in (20), avremo bisogno dell'identità di Vaughan [Vau77]:

Proposizione (2.1). *Siano $U, V \geq 1$, allora per ogni $n > V$ risulta*

$$\Lambda(n) = \sum_{\substack{m|n \\ m\leq U}} \mu(m) \log\frac{n}{m} - \sum_{\substack{m\leq U \\ md|n}} \sum_{d\leq V} \mu(m)\Lambda(d) + \sum_{\substack{m>U \\ md|n}} \sum_{d>V} \mu(m)\Lambda(d). \tag{21}$$

Consideriamo ora $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ una funzione moltiplicativa, allora possiamo applicare l'identità di Vaughan e dire che per ogni $x > 0$, $U, V \geq 1$,

$$\sum_n \Lambda(n) f(n) e(\alpha n) \eta\left(\frac{n}{x}\right) = S_{I,1} - S_{I,2} + S_{II} + S_{0,\infty}, \tag{22}$$

dove

$$S_{I,1} = \sum_{m\leq U} \mu(m) f(m) \sum_n (\log n) e(\alpha m n) f(n) \eta\left(\frac{mn}{x}\right), \tag{23}$$

$$S_{I,2} = \sum_{d\leq V} \Lambda(d) f(d) \sum_{m\leq U} \mu(m) f(m) \sum_n e(\alpha d m n) f(n) \eta\left(\frac{dmn}{x}\right), \tag{24}$$

$$S_{II} = \sum_{m>U} f(m) \left(\sum_{\substack{d>U \\ d|m}} \mu(d)\right) \sum_{n>V} \Lambda(n) e(\alpha m n) f(n) \eta\left(\frac{mn}{x}\right), \tag{25}$$

$$S_{0,\infty} = \sum_{n\leq V} \Lambda(n) e(\alpha n) f(n) \eta\left(\frac{n}{x}\right). \tag{26}$$

Definiamo f come

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se MCD}(n, v) = 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{27}$$

dove $v = 1$ o $v = 2$, a seconda del termine di errore (vedremo in seguito che la scelta migliore sarà la seconda). Quindi definendo

$$S_{0,v} = \sum_{n|v} \Lambda(n)e(\alpha n)\eta\left(\frac{n}{x}\right), \tag{28}$$

abbiamo che

$$S_\eta(\alpha, x) = S_{I,1} - S_{I,2} + S_{II} + S_{0,\infty} + S_{0,v}. \tag{29}$$

Le somme $S_{I,1}, S_{I,2}$ sono dette lineari o di tipo I, la somma S_{II} è detta di tipo II o bilineare, mentre le somme $S_{0,\infty}, S_{0,v}$ avranno ordine trascurabile. Avremo quindi bisogno di alcune stime per queste somme

Lemma (2.1). *Sia* $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\beta}{qQ}$, $\mathrm{MCD}(a,q) = 1$, $|\beta| \leq 1$, $q \leq Q$. *Allora per ogni* $A, C \geq 0$,

$$\sum_{y<n\leq y+q} \min\left(A, \frac{C}{|\sin(\pi\alpha n)|^2}\right) \leq \min\left(2A + \frac{6q^2}{\pi^2}C, 3A + \frac{4q}{\pi}\sqrt{AC}\right) \tag{30}$$

Lemma (2.2). *Sia* $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\beta}{qQ}$, $\mathrm{MCD}(a,q) = 1$, $|\beta| \leq 1$, $q \leq Q$. *Siano* $y_2 > y_1 \geq 0$. *Se* $y_2 - y_1 \leq q$ *e* $y_2 \leq \frac{Q}{2}$, *allora per ogni* $A, C \geq 0$,

$$\sum_{\substack{y_1<n\leq y_2 \\ q\nmid n}} \min\left(A, \frac{C}{|\sin(\pi\alpha n)|^2}\right) \leq \min\left(\frac{20}{3\pi^2}Cq^2, 2A + \frac{4q}{\pi}\sqrt{AC}\right). \tag{31}$$

Lemma (2.3). *Sia* $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\beta}{qQ}$, $\mathrm{MCD}(a,q) = 1$, $|\beta| \leq 1$, $q \leq Q$. *Siano* $y_2 > y_1 \geq 0$. *Se* $y_2 - y_1 \leq q$ *e* $y_2 \leq \frac{Q}{2}$, *allora per ogni* $B, C > 0$,

$$\sum_{\substack{y_1<n\leq y_2 \\ q\nmid n}} \min\left(\frac{B}{|\sin(\pi\alpha n)|}, \frac{C}{|\sin(\pi\alpha n)|^2}\right) \leq 2B\frac{q}{\pi} \max\left(2, \log\frac{Ce^3q}{B\pi}\right). \tag{32}$$

Inoltre è valido anche il limite superiore $\frac{2Bq}{\pi}\log\left(\frac{2e^2q}{\pi}\right)$.

Proposizione (2.2). *Siano* $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\delta}{x}$, $\mathrm{MCD}(a,q) = 1$, $\left|\frac{\delta}{x}\right| \leq \frac{1}{qQ_0}$, $q \leq Q_0$ *e* $Q_0 \geq 16$. *Sia* η *continua, in* C^2 *e a supporto compatto, tale che* $|\eta|_1 = 1$ *e* $\eta'' \in L_1$ *e sia* $c_0 \geq |\widehat{\eta''}|_\infty$.
Sia $1 \leq D \leq x$. *Allora se* $|\delta| \leq \frac{1}{2c_2}$, *dove*

$$c_2 = \left(\frac{3\pi}{5\sqrt{c_0}}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{13}{3}}\right), \tag{33}$$

il valore assoluto di

$$\sum_{m \leq D} \mu(m) \sum_n e(\alpha mn)\eta\left(\frac{mn}{x}\right) \tag{34}$$

è al più

$$\frac{x}{q}\min\left(1, \frac{c_0}{(2\pi\delta)^2}\right)\left|\sum_{\substack{m\leq \frac{M}{q} \\ \mathrm{MCD}(m,q)=1}} \frac{\mu(m)}{m}\right| + O\left(c_0\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\right)\left(\frac{D^2}{2xq}+\frac{D}{2x}\right)\right) \tag{35}$$

$$+\frac{2\sqrt{c_0c_1}}{\pi}D + 3c_1\frac{x}{q}\log^+\frac{Dq}{c_2x} + \frac{\sqrt{C_0c_1}}{\pi}q\log^+\frac{2D}{q} \tag{36}$$

$$+\frac{|\eta'|_1}{\pi}q\max\left(2, \log\frac{c_0e^3q^2}{4\pi|\eta'|_1x}\right) + \left(\frac{2\sqrt{3c_0c_1}}{\pi}+\frac{3c_1}{c_2}+\frac{55c_0c_2}{12\pi^2}\right)q,$$

dove

$$c_1 = 1 + \frac{D|\eta'|_1}{2x}, \tag{37}$$

$$M \in \left[\min\left(\frac{Q_0}{2}, D\right), D\right] \tag{38}$$

e $\log^+ n$ *indica* $\log|n|$.
La stessa stima vale se $|\delta| \geq \frac{1}{2c_2}$ *e* $D \leq \frac{Q_0}{2}$.
In generale se $|\delta| \geq \frac{1}{2c_2}$, *il valore assoluto di* (34) *è* (35) *più*

$$\frac{2\sqrt{c_0c_1}}{\pi}\left(D + (1+\epsilon)\min\left(\left\lfloor\frac{x}{|\delta|q}\right\rfloor + 1, 2D\right)\left(\varpi_\epsilon + \frac{1}{2}\log^+\frac{2|\delta|qD}{x}\right)\right) \tag{39}$$

$$+2c_1\left(2+\frac{1+\epsilon}{\epsilon}\log^+\frac{2D|\delta|q}{x}\right)\frac{x}{Q_0} + \frac{35c_0c_2}{6\pi^2}q,$$

per $\epsilon \in (0,1]$ *arbitrario e*

$$\varpi_\epsilon = \sqrt{3+2\epsilon} + \left(\frac{1+\sqrt{\frac{13}{3}}}{4} - 1\right)\frac{1}{2(1+\epsilon)}. \tag{40}$$

Lemma (2.4). *Sia* $q \geq 1$. *Siano* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *della forma* $\alpha_i = \frac{a_i}{q} + v_i$, *con* $0 \leq a_i < q$ *e gli elementi* $v_i \in \mathbb{R}$ *giacciono in un intervallo di ampiezza*

$v > 0$. Inoltre se $a_i = a_j$ allora $|v_i - v_j| > \nu > 0$. Assumiamo $v + \nu \leq \frac{1}{q}$. Allora per ogni $W, W' \geq 1$, $W' \geq W/2$,

$$\sum_{i=1}^{k} \left| \sum_{W'<p\leq W} (\log p) e(\alpha_i p) \right|^2 \leq \min\left(1, \frac{2q}{\phi(q)} \frac{1}{\log((qv+q\nu)^{-1})}\right) \cdot \\ \cdot (W - W' + \nu^{-1}) \sum_{W'<p\leq W} (\log p)^2. \tag{41}$$

Lemma (2.5). *Sia $W \geq 1$, $W' \geq W/2$. Sia $\alpha = \frac{a}{q} + O\left(\frac{1}{qQ}\right)$, con $q \leq Q$. Allora*

$$\sum_{A_0<m\leq A_1} \left| \sum_{W'<p\leq W} (\log p) e(\alpha m p) \right|^2 \\ \leq \left\lceil \frac{A_1 - A_0}{\min(q, \lceil Q/2 \rceil)} \right\rceil (W - W' + 2q) \sum_{W'<p\leq W} (\log p)^2. \tag{42}$$

Se $q < W/2$ e $Q \geq 3.5W$, vale anche la seguente maggiorazione:

$$\sum_{A_0<m\leq A_1} \left| \sum_{W'<p\leq W} (\log p) e(\alpha m p) \right|^2 \\ \leq \left\lceil \frac{A_1 - A_0}{q} \right\rceil \frac{q}{\phi(q)} \frac{W}{\log(W/2q)} \sum_{W'<p\leq W} (\log p)^2. \tag{43}$$

Se $A_1 - A_0 \leq \varrho q$ e $q \leq \rho Q$ con $\varrho, \rho \in [0,1]$, vale la seguente maggiorazione:

$$\sum_{A_0<m\leq A_1} \left| \sum_{W'<p\leq W} (\log p) e(\alpha m p) \right|^2 \leq \left(W - W' + \frac{q}{1 - \varrho\rho}\right) \sum_{W'<p\leq W} (\log p)^2. \tag{44}$$

Proposizione (2.4). *Siano $x \geq W \geq 1$, $W' \geq W/2$, $U' \geq \frac{x}{2W}$. Sia $Q \geq 3.5W$. Sia $2\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\delta}{x}$ con $\mathrm{MCD}(a,q) = 1$, $\left|\frac{\delta}{x}\right| \leq \frac{1}{qQ}$ e $q \leq Q$. Allora per $q \leq \rho Q$, con $\rho \in [0,1]$,*

$$S_2(U', W', W) \leq \left(\max(1, 2\rho)\left(\frac{x}{8q} + \frac{x}{2W}\right) + \frac{W}{2} + 2q\right) \sum_{W'<p\leq W} (\log p)^2. \tag{45}$$

Se $q < \frac{W}{2}$*,*

$$S_2(U', W', W) \leq \frac{1}{\log(W) - \log(2q)} \left(\frac{x}{4\phi(q)} + \frac{qW}{\phi(q)} \right) \sum_{W' < p \leq W} (\log p)^2. \quad (46)$$

Se $W > \frac{x}{4q}$*, vale anche la seguente maggiorazione:*

$$S_2(U', W', W) \leq \left(\frac{W}{2} + \frac{4Wq^2}{4Wq - x} \right) \sum_{W' < p \leq W} (\log p)^2. \quad (47)$$

Se $\delta \neq 0$ *e* $\frac{x}{4W} + q \leq Q$*,*

$$S_2(U', W', W) \leq \min \left(1, \frac{2q}{\phi(q) \log \left(\frac{x}{|\delta q|} \left(q + \frac{x}{4W} \right)^{-1} \right)} \right) \cdot \left(\frac{x}{|\delta q|} + \frac{W}{2} \right) \sum_{W' < p \leq W} (\log p)^2. \quad (48)$$

Infine, se $\delta \neq 0$ *e* $q \leq \rho Q$*, dove* $\rho \in [0, 1)$*,*

$$S_2(U', W', W) \leq \left(\frac{x}{|\delta q|} + \frac{W}{2} + \frac{x}{8Q(1-\rho)} + \frac{x}{4W(1-\rho)} \right) \sum_{W' < p \leq W} (\log p)^2. \quad (49)$$

La stima banale è dell'ordine di

$$S_2(U', W', W) = \frac{x}{2 \log x} \sum_{W' < p \leq W} (\log p)^2.$$

Tutti questi risultati portano alla formulazione del seguente teorema:

Teorema (2.3). *Sia* $x \geq x_0$ *con* $x_0 = 2.16 \cdot 10^{20}$*. Sia*

$$S_\eta(\alpha, x) = \sum_n \Lambda(n) e(\alpha n) \eta \left(\frac{n}{x} \right)$$

con $\eta(t) = 4 \max(\log 2 - |\log 2t|, 0)$*. Sia* $2\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\delta}{x}$ *con* $q \leq Q$*,* $\mathrm{MCD}(a, q) = 1$ *e* $\left| \frac{\delta}{x} \right| \leq \frac{1}{qQ}$*, dove* $Q = \frac{3}{4} x^{\frac{2}{3}}$*.*
Allora se $q \leq \frac{x^{\frac{1}{3}}}{6}$*, allora*

$$|S_\eta(\alpha, x)| \leq \frac{R_{x, \delta_0 q} \log(\delta_0 q) + 0.5}{\sqrt{\delta_0 \phi(q)}} x + \frac{2.5x}{\sqrt{\delta_0 q}} + \frac{2x}{\delta_0 q} L_{x, \delta_0, q} + 3.2 x^{\frac{5}{6}}, \quad (50)$$

dove:

$$\delta_0 = \max\left(2, \frac{|\delta|}{4}\right), \tag{51}$$

$$R_{x,t} = 0.27125 \log\left(1 + \frac{\log 4t}{2\log \frac{9x^{1/3}}{2.004t}}\right) + 0.41415, \tag{52}$$

$$L_{x,\delta,q} = \min\left(\frac{\log \delta^{\frac{7}{4}} q^{\frac{13}{4}} + \frac{80}{9}}{\phi(q)/q}, \frac{5}{6}\log x + \frac{50}{9}\right) + \log q^{\frac{80}{9}} \delta^{\frac{16}{9}} + \frac{111}{5}. \tag{53}$$

Se $q > \frac{x^{\frac{1}{3}}}{6}$, *allora*

$$|S_\eta(\alpha, x)| \le 0.2727 x^{\frac{5}{6}} (\log x)^{\frac{3}{2}} + 1218 x^{\frac{2}{3}} \log x. \tag{54}$$

Per quanto riguarda gli Archi Maggiori, che verranno trattati nel terzo capitolo, faremo uno studio approfondito della trasformata di Mellin di una composizione della funzione gaussiana che sarà fondamentale non solo per il nostro lavoro, ma anche per le applicazioni in teoria dei numeri in generale. Per fare questo studieremo le funzioni che fungono da pesi nelle serie in esame, studiandone le caratteristiche analitiche per fornire stime più precise.

Presentiamo quindi le funzione η:

Lemma (3.1). *Sia* V *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *dotato di prodotto scalare* $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Allora per ogni* $v, w \in V$ *con* $|w - v|_2 \le |v|_2/2$,

$$\langle v, w \rangle = |v|_2 |w|_2 + O(2.71 |v - w|_2^2).$$

Le definizioni sono:

$$\eta_\heartsuit(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{55}$$

$$\eta_\circ(t) = h(t)\eta_\heartsuit(t) = \begin{cases} t^3(2-t)^3 e^{-\frac{(t-1)^2}{2}} & \text{se } t \in [0, 2], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{56}$$

Definiamo $\eta_+ : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ come

$$\eta_+(t) = h_H(t)\eta_\heartsuit(t), \tag{57}$$

dove $h_H(t)$ è l'approssimazione di $h(t)$ nel senso che la restrizione della trasformata di Mellin sull'asse immaginaria ha supporto compatto $[-iH, iH]$, dove $H > 0$ è una costante.

Ci concentreremo adesso sul calcolo della trasformata di Mellin $F_\delta(s)$ della funzione gaussiana "twisted"

$$e(\delta t)\eta_\heartsuit(t) = e(\delta t) e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{58}$$

Essa è uguale a

$$F_\delta(s) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e(\delta t) t^s \frac{dt}{t}, \tag{59}$$

dove $\delta \in \mathbb{R}$.

Teorema (3.1). *Sia $f_\delta(t) = e(\delta t)\eta_\heartsuit(t)$ con $\delta \in \mathbb{R}$. Sia*

$$F_\delta(s) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e(\delta t) \frac{dt}{t}$$

la sua trasformata di Mellin. Siano $s = \sigma + i\tau$, $\sigma \geq 0$, $\tau \neq 0$ e $\ell = -2\pi\delta$. Allora, se $\mathrm{sgn}(\delta) \neq \mathrm{sgn}(\tau)$,

$$|F_\delta(s)| \leq C_{0,\tau,\ell} e^{-E\left(\frac{|\tau|}{(\pi\delta)^2}\right)|\tau|} + C_{1,\tau,\ell} e^{-0.4798\tau} + C_{2,\tau,\ell} e^{-\min\left(\frac{1}{8}\left(\frac{\tau}{\pi\delta}\right)^2, \frac{25}{32}|\tau|\right)}, \tag{60}$$

dove $v(\rho)$ è definita come $v(\rho) = \sqrt{\frac{1+j(\rho)}{2}}$ e

$$E(\rho) = \frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{v(\rho)} - \frac{2(v(\rho)-1)}{\rho}\right), \tag{61}$$

$$C_{0,\tau,\ell} = \min\left(2, \frac{3.3\sqrt{|\tau|}}{2\pi|\delta|}\right)\left(1 + \max(7.83^{1-\sigma}, 1.63^{\sigma-1})\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{3/2}{\min\left(\frac{|\tau|}{2\pi|\delta|}, \sqrt{|\tau|}\right)}\right)^{1-\sigma}, \tag{62}$$

$$C_{1,\tau,\ell} = \left(1 + \frac{1+\sqrt{2}}{\tau}\right)\tau^{\frac{\sigma}{2}}, \tag{63}$$

$$C_{2,\tau,\ell} = P_\sigma\left(\min\left(\frac{|\tau|}{2\pi|\delta|}, \frac{5}{4}\sqrt{|\tau|}\right)\right), \tag{64}$$

$$\tag{65}$$

dove

$$P_\sigma(x) = \begin{cases} x^{\sigma-2} & \text{se } \sigma \in [0,2] \\ x^{\sigma-2} + (\sigma-2)x^{\sigma-4} & \text{se } \sigma \in (2,4] \\ x^{\sigma-2} + \cdots + (\sigma-2k)x^{\sigma-2(k+1)} & \text{se } \sigma \in (2k, 2(k+1)] \end{cases}$$

Se $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau)$ (o $\delta = 0$) e $|\tau| > 2$,

$$|F_\delta(s)| \leq C'_{\tau,\ell} e^{-\frac{\pi}{4}|\tau|}, \tag{66}$$

dove

$$C'_{\tau,\ell} = \frac{e^{\pi/2}\tau^{\sigma/2}}{2} \cdot \begin{cases} 1 + \frac{2\pi^{3/2}|\delta|}{\sqrt{|\tau|}} & \textit{per } \sigma \in [0,1] \\ \Gamma(\sigma/2) & \textit{per } \sigma > 0 \textit{ arbitrariamente} \end{cases}$$

Lemma (3.2). *Siano $E(\rho)$ e $v(\rho)$ come sopra. Allora:*

$$E(\rho) \geq \frac{1}{8}\rho - \frac{5}{384}\rho^3 \tag{67}$$

per ogni $\rho > 0$. Inoltre

$$E(\rho) = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4(1+\sin\beta)}, \tag{68}$$

dove $\beta = \arcsin \frac{1}{v(\rho)}$.

Corollario (3.1). *Sia $f_\delta(t) = e^{\frac{t^2}{2}} e(\delta t)$ con $\delta \in \mathbb{R}$. Sia F_δ la trasformata di Mellin di f_δ. Sia $s = \sigma + i\tau$, dove $\sigma \in [0,1]$ e $\tau \geq \max(4\pi^2|\delta|, 100)$. Allora per $0 \leq k \leq 2$,*

$$|F_\delta(s+k)| + |F_\delta(k+1-s)| \leq c_k \begin{cases} \left(\frac{|\tau|}{2\pi|\delta|}\right)^k e^{-0.1065\left(\frac{\tau}{\pi\delta}\right)^2} & \textit{se } |\tau| < \frac{3}{2}(\pi\delta)^2, \\ |\tau|^{\frac{k}{2}} e^{-0.1598|\tau|} & \textit{se } |\tau| \geq \frac{3}{2}(\pi\delta)^2, \end{cases} \tag{69}$$

dove $c_0 = 4.226$, $c_1 = 3.516$ e $c_2 = 3.262$.

Sempre nel terzo capitolo ricaveremo una formula generale per le somme che tratteremo, strettamente connessa ad una verifica sperimentale dell'Ipotesi Generalizzata di Riemann.

Lemma (3.3). *Sia $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ in C_1. Siano $x \in \mathbb{R}^+$ e $\delta \in \mathbb{R}$. Sia χ un carattere primitivo modulo q, con $q \geq 1$.*
Chiamiamo $G_\delta(s)$ la trasformata di Mellin della funzione $\eta(t)e(\delta t)$. Supponiamo che sia $\eta(t)$ che $\eta'(t)$ siano in L_2 e che sia $\eta(t)t^{\sigma-1}$ e $\eta'(t)t^{\sigma-1}$ siano in L_1 per tutti i σ in un intervallo aperto J tale che $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \subset J$. Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n)\chi(n)e\left(\frac{\delta}{x}n\right)\eta\left(\frac{n}{x}\right) = I_{q=1}\widehat{\eta}(-\delta)x - \sum_\rho G_\delta(\rho)x^\rho \tag{70}$$

$$- R + O\left((\log x + 6.01)(|\eta'|_2 + 2\pi|\delta||\eta|_2)\right) x^{-\frac{1}{2}}, \tag{71}$$

dove

$$I_{q=1} = \begin{cases} 1 & \textit{se } q = 1, \\ 0 & \textit{se } q \neq 1, \end{cases} \tag{72}$$

mentre

$$R = \begin{cases} \eta(0)\left(\log\frac{2\pi}{q} + \gamma - \frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)}\right) + c_0 & \text{se } q > 1, \\ \eta(0)\log(2\pi) & \text{se } q = 1, \end{cases} \tag{73}$$

con

$$c_0 = \frac{2}{3}O\left(\left|\frac{\eta'(t)}{\sqrt{t}}\right|_1 + \left|\eta'(t)\sqrt{t}\right|_1 + 2\pi|\delta|\left(\left|\frac{\eta(t)}{\sqrt{t}}\right|_1 + \left|\eta(t)\sqrt{t}\right|_1\right)\right). \tag{74}$$

La somma $\sum_\rho$ *rappresenta la somma su tutti gli zeri non banali di* $L(s,\chi)$.

Lemma (3.4). *Sia* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *in* C^1. *Supponiamo che* $\lim_{t\to\infty} f(t)t\log t = 0$. *Sia* χ *un carattere primitivo modulo* q, *con* $q \geq 1$ *e indichiamo con* ρ *gli zeri non banali di* $L(s,\chi)$. *Allora, per ogni* $y \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho \text{ non banale} \\ \Im(\rho) > y}} f(\Im(\rho)) = \frac{1}{2\pi}\int_y^\infty f(T)\log\frac{qT}{2\pi}\,dT \\ + \frac{1}{2}O\left(|f(y)|g_\chi(y) + \int_y^\infty |f'(T)|g_\chi(T)\,dT\right), \end{aligned} \tag{75}$$

dove

$$g_\chi(T) = 0.5\log qT + 17.7. \tag{76}$$

Se f *è reale e decrescente su* $[y,\infty)$, *allora*

$$\sum_{\substack{\rho \text{ non banale} \\ \mathrm{Im}(\rho) > y}} f(\mathrm{Im}(\rho)) = \frac{1}{2\pi}\int_y^\infty f(T)\log\frac{qT}{2\pi}\,dT + O\left(\frac{1}{4}\int_y^\infty \frac{f(T)}{T}\,dT\right).$$

Lemma (3.5). *Sia* $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *tale che* $\eta(t)$ *e* $\log t \cdot \eta(t)$ *siano in* $L_1 \cap L_2$. *Siano* $\delta \in \mathbb{R}$ *e* $G_\delta(s)$ *la trasformata di Mellin di* $\eta(t)e(\delta t)$. *Sia* χ *un carattere primitivo modulo* q *con* $q \geq 1$. *Fissiamo un* $T_0 \geq 1$. *Supponiamo che tutti gli zeri non banali* ρ *di* $L(s,\chi)$ *con* $|\mathrm{Im}(\rho)| \leq T_0$ *giacciano sulla retta critica. Allora la quantità*

$$\sum_{\substack{\rho \text{ non banale} \\ |\Im(\rho)| \leq T_0}} |G_\delta(\rho)|$$

è limitata da

$$\begin{aligned} (|\eta|_2 + |\eta\cdot\log|_2)\sqrt{T_0}\log qT_0 + (17.21|\eta\cdot\log|_2 - (\log 2\pi\sqrt{e})|\eta|_2)\sqrt{T_0} \\ + \left|\frac{\eta(t)}{\sqrt{t}}\right|_1 (1.32\log q + 34.5). \end{aligned} \tag{77}$$

Lemma (3.6). *Definiamo* $\eta_\heartsuit(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. *Siano* $x \in \mathbb{R}^+$ *e* $\delta \in \mathbb{R}$. *Sia* χ *un carattere primitivo modulo* q, *con* $q > 1$. *Supponiamo che tutti gli zeri non banali* ρ *di* $L(s,\chi)$ *con* $\Im(\rho) < T_0$ *soddisfino* $\Re(\rho) = \frac{1}{2}$. *Supponiam, inoltre, che* $T_0 > \max(4\pi^2|\delta|, 100)$.
Scriviamo $F_\delta(s)$ *per la trasformata di Mellin di* $\eta_\heartsuit(t)e(\delta t)$. *Allora*

$$\sum_{\substack{\rho \text{ non banale} \\ |\Im(\rho)|>T_0}} |F_\delta(\rho)| \leq \log\frac{qT_0}{2\pi}\left(4.329e^{-0.1598T_0} + 0.802|\delta|e^{-0.1065\left(\frac{T_0}{\pi|\delta|}\right)^2}\right).$$

Proposizione (3.2). *Sia* $\eta(t) = \eta_\heartsuit(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. *Siano* $x \geq 1$, $\delta \in \mathbb{R}$ *e* χ *un carattere primitivo modulo* q, *con* $q \geq 1$. *Supponiamo che tutti gli zeri non banali* ρ *di* $L(s,\chi)$ *con* $\Im(\rho) \leq T_0$ *giacciano sulla retta critica. Assumiamo, inoltre, che* $T_0 \geq \max(4\pi^2|\delta|, 100)$. *Allora*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)\chi(n)e\left(\frac{\delta}{x}n\right)\eta\left(\frac{n}{x}\right) = \begin{cases} \widehat{\eta}(-\delta)x + O\left(\mathrm{err}_{\eta,\chi}(\delta,x)\right)x & se\ q=1, \\ O\left(\mathrm{err}_{\eta,\chi}(\delta,x)\right)x & se\ q=1, \end{cases} \tag{78}$$

dove

$$\begin{aligned}\mathrm{err}_{\eta,\chi}(\delta,x) &= \log\frac{qT_0}{2\pi}\left(4.329e^{-0.1598T_0} + 0.802|\delta|e^{-0.1065\left(\frac{T_0}{\pi|\delta|}\right)^2}\right) \\ &\quad + \left(2.337\sqrt{T_0}\log(qT_0) + 21.817\sqrt{T_0} + 2.85\log q + 74.38\right)x^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + (3\log q + 14|\delta| + 17)\,x^{-1} + (\log q + 6)\,(1+5|\delta|)x^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Proposizione (3.3). *Siano* $\eta(t) = t^2e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\eta_1(t) = 2\chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]}(t)$, $\eta_2(t) = \eta_1 *_M \eta_1(t)$ *e* $\eta_* = \eta_2 *_M \eta$. *Siano* $x \geq 1$, $\delta \in \mathbb{R}$ *e* χ *un carattere primitivo modulo* q, *con* $q \geq 1$. *Supponiamo che tutti gli zeri non banali* ρ *di* $L(s,\chi)$ *con* $\Im(\rho) \leq T_0$ *giacciano sulla retta critica. Assumiamo, inoltre, che* $T_0 \geq \max(4\pi^2|\delta|, 100)$. *Allora*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)\chi(n)e\left(\frac{\delta}{x}n\right)\eta_*\left(\frac{n}{x}\right) = \begin{cases} \widehat{\eta_*}(-\delta)x + O\left(\mathrm{err}_{\eta_*,\chi}(\delta,x)\right)x & se\ q=1, \\ O\left(\mathrm{err}_{\eta_*,\chi}(\delta,x)\right)x & se\ q=1, \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned}\mathrm{err}_{\eta_*,\chi}(\delta,x) &= T_0\log\frac{qT_0}{2\pi}\left(3.5e^{-0.1598T_0} + 0.0019e^{-0.1065\left(\frac{T_0}{\pi|\delta|}\right)^2}\right) \\ &\quad + \left(1.675\sqrt{T_0}\log(qT_0) + 6.936\sqrt{T_0} + 1.954\log q + 51.047\right)x^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + (6+22|\delta|)\,x^{-1} + (\log q + 6)\,(3+17|\delta|)x^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Proposizione (3.4). *Sia $\eta(t) = \eta_+(t)$, definita come in (57) per qualche $H \geq 50$. Siano $x \geq 10^3$, $\delta \in \mathbb{R}$ e χ un carattere primitivo modulo q, con $q \geq 1$. Supponiamo che tutti gli zeri non banali ρ di $L(s,\chi)$ con $\Im(\rho) \leq T_0$ giacciano sulla retta critica. Assumiamo, inoltre, che $T_0 \geq H + \max(4\pi^2|\delta|, 100)$. Allora*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n)\chi(n)e\left(\frac{\delta}{x}n\right)\eta\left(\frac{n}{x}\right) = \begin{cases} \widehat{\eta}(-\delta)x + O\left(\mathrm{err}_{\eta_+,\chi}(\delta,x)\right)x & se\ q=1, \\ O\left(\mathrm{err}_{\eta_+,\chi}(\delta,x)\right)x & se\ q=1, \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathrm{err}_{\eta_+,\chi}(\delta,x) = \log\frac{qT_0}{2\pi}\left(9.462\sqrt{T_0'}e^{-0.1598T_0'} + 11.287|\delta|e^{-0.1065\left(\frac{T_0'}{\pi|\delta|}\right)^2}\right) \\ + \left(1.631\sqrt{T_0}\log(qT_0) + 12.42\sqrt{T_0} + 1.321\log q + 34.51\right)x^{-\frac{1}{2}} \\ + (9+11|\delta|)\,x^{-1} + (\log q)\,(11+6|\delta|)x^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

dove $T_0' = T_0 - H$.

Per concludere nel quarto e ultimo capitolo dedurremo una stima totale per gli Archi Maggiori ed una sugli Archi Minori. Completeremo, quindi, con la formulazione del teorema che dimostra la Congettura Debole di Goldbach e analizzeremo le sue conseguenze.

Proposizione (4.1). *Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{C}$, tale che sia in $\ell_1 \cap \ell_2$ e che $a_n = 0$ per $n \leq \sqrt{x}$. Siano $Q_0 \geq 1$, $\delta_0 \geq 1$ tali che $\delta_0 Q_0^2 \leq x/2$. Definiamo $Q = \sqrt{\frac{x}{2\delta_0}}$. Sia*

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q \leq Q_0} \bigcup_{\substack{a \bmod q \\ (a,q)=1}} \left(\frac{a}{q} - \frac{\delta_0 Q_0}{qx}, \frac{a}{q} + \frac{\delta_0 Q_0}{qx}\right). \tag{79}$$

Sia $S(\alpha) = \sum_n a_n e(\alpha n)$ per $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Allora

$$\int_{\mathfrak{M}} |S(\alpha)|^2 \leq \left(\max_{q \leq Q_0} \max_{s \leq Q_0/q} \frac{G_q\left(\frac{Q_0}{sq}\right)}{G_q\left(\frac{Q}{sq}\right)}\right) \sum_n |a_n|^2,$$

dove

$$G_q(R) = \sum_{\substack{r \leq R \\ (r,q)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\phi(r)}. \tag{80}$$

Lemma (4.1). *Siano $m \geq 1$ e $q \geq 1$. Allora,*

$$\prod_{p|q \ o \ p \leq m} \frac{p}{p-1} \leq e^{\gamma} \left(\log(m + \log q) + 0.65771\right). \tag{81}$$

Lemma (4.2). *Sia $Q_0 \geq 1$, $Q \geq 182 Q_0$. Sia $q \leq Q_0$, $s \leq \frac{Q_0}{q}$ con $q \in \mathbb{Z}$. Allora:*

$$\frac{G_q\left(\frac{Q_0}{sq}\right)}{G_q\left(\frac{Q}{sq}\right)} \leq \frac{e^{\gamma} \log\left(\frac{Q_0}{sq} + \log q\right) + 1.172}{\log \frac{Q}{Q_0} + 1.312} \leq \frac{e^{\gamma} \log Q_0 + 1.172}{\log \frac{Q}{Q_0} + 1.312}.$$

Proposizione (4.2). *Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{C}$, tale che sia in $\ell_1 \cap \ell_2$ e che $a_n = 0$ per $n \leq \sqrt{x}$. Siano $Q_0 \geq 10^5$, $\delta_0 \geq 1$ tali che $(20000 Q_0)^2 \leq \frac{x}{2\delta_0}$. Definiamo $Q = \sqrt{\frac{x}{2\delta_0}}$.*
Sia $S(\alpha) = \sum_n a_n e(n\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Sia $\mathfrak{M}$ come in (79). Allora se $Q_0 \leq Q^{0.6}$,

$$\int_{\mathfrak{M}} |S(\alpha)|^2 \, d\alpha \leq \frac{\log Q_0 + c_+}{\log Q + c_E} \sum_n |a_n|^2,$$

dove $c_+ = 1.36$ e $c_E = 1.3325822$.
Sia $\mathfrak{M}_{\delta_0, Q_0}$ come in (3). Allora se $2Q_0 \leq (2Q)^{0.6}$,

$$\int_{\mathfrak{M}_{\delta_0, Q_0}} |S(\alpha)|^2 \, d\alpha \leq \frac{\log 2Q_0 + c_+}{\log 2Q + c_E} \sum_n |a_n|^2$$

Se $Q > Q^{0.6}$, useremo la stima banale

$$\int_{\mathfrak{M}_{\delta_0, Q_0}} |S(\alpha)|^2 \, d\alpha \leq \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |S(\alpha)|^2 \, d\alpha = \sum_n |a_n|^2,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal Teorema di Plancherel.

Teorema (4.1). *Definiamo $S_\eta(\alpha)$ come in (1). Sia $\eta_+ = h_{200}(t)\eta_\heartsuit(t)$ come in (57) con $H = 200$. Sia $\eta_* = (\eta_2 *_M \phi)(\varkappa t)$, dove $\phi(t) = t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\eta_2 = \eta_1 *_M \eta_1$, $\eta_1(t) = 2\chi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(t)$ e $\varkappa = 49$.*
Fissiamo un $r_0 = 150000$. Sia, infine $\delta_0 = 8$. Allora per ogni $N \geq 10^{27}$,

$$\int_{\mathfrak{M}_{8, r_0}} |S_{\eta_+}(\alpha, x)|^2 \, d\alpha \leq 8.7806 x$$

e

$$\int_{\mathfrak{M}_{8, r_0}} S_{\eta_+}(\alpha, x)^2 S_{\eta_*}(\alpha . x) e(-N\alpha) \, d\alpha \geq \frac{1.058259}{\varkappa} x^2. \tag{82}$$

Lemma (4.3). *Siano $f, g : \mathbb{N} \supset [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Supponiamo che per ogni $x \in [a,b]$,*

$$\sum_{a \le n \le x} f(n) \le F(x), \tag{83}$$

dove $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, differenziabile a tratti e non decrescente. Allora,

$$\sum_{n=a}^{b} f(n)g(n) \le \left(\max_{n \ge a} g(n)\right) F(a) + \int_a^b \left(\max_{n \ge u} g(n)\right) F'(u)\, du.$$

Proposizione (4.3). *Siano $S_1(\alpha) = \sum_n a_n e(n\alpha)$, $a_n \in \mathbb{C}$ e $\{a_n\} \in L_1$. Sia $S_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ continua. Definiamo $\mathfrak{M}_{\delta_0,r}$ come in (3).*
Sia r_0 un numero intero positivo, tale che $r_0 \le r_1$. Sia $H : [r_0, r_1] \to \mathbb{R}^+$ una funzione non decrescente continua e derivabile tale che

$$\frac{1}{\sum_n |a_n|^2} \int_{\mathfrak{M}_{\delta_0,r+1}} |S_1(\alpha)|^2\, d\alpha \le H(r) \tag{84}$$

per qualche $\delta_0 \le \frac{x}{2r_1^2}$ e per tutti gli $r \in [r_0, r_1]$. Supponiamo, inoltre, che $H(r_1) = 1$. Sia $g : [r_0, r_1] \to \mathbb{R}^+$ una funzione non crescente tale che

$$\max_{\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus \mathfrak{M}_{\delta_0,r}} |S_2(\alpha)| \le g(r) \tag{85}$$

per tutti gli $r \in [r_0, r_1]$ e δ_0 come prima.
Allora,

$$\frac{1}{\sum_n |a_n|^2} \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus \mathfrak{M}_{\delta_0,r_0}} |S_1(\alpha)|^2 |S_2(\alpha)|\, d\alpha$$
$$\le g(r_0)\left(H(r_0) - I_0\right) + \int_{r_0}^{r_1} g(r) H'(r)\, dr, \tag{86}$$

dove

$$I_0 = \frac{1}{\sum_n |a_n|^2} \int_{\mathfrak{M}_{\delta_0,r_0}} |S_1(\alpha)|^2\, d\alpha. \tag{87}$$

Teorema (4.2). *Sia $x \ge 10^{25}\varkappa$, dove $\varkappa \ge 1$. Definiamo*

$$S_\eta(\alpha, x) = \sum_n \Lambda(n) e(\alpha n) \eta\left(\frac{n}{x}\right).$$

Sia $\eta_*(t) = (\eta_2 *_M \phi)(\varkappa t)$, dove $\eta_2 = \eta_1 *_M \eta_1$, $\eta_1(t) = 2\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)$ e $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è una funzione continua in L^1.

Sia, inoltre, $\eta_+ : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *una funzione limitata e derivabile con* $\lim_{t\to+\infty} \eta_+(t) = 0$. *Definiamo* $\mathfrak{M}_{\delta_0,r}$ *come in* (3) *con* $\delta_0 = 8$. *Sia* $10^5 \leq r < r_1$, *dove* $r_1 = \frac{3}{8}\left(\frac{x}{\varkappa}\right)^{\frac{4}{15}}$.
Definiamo

$$Z_{r_0} = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}\setminus\mathfrak{M}_{8,r_0}} |S_{\eta_*}(\alpha, x)|^2 |S_{\eta_+}(\alpha, x)|\, d\alpha.$$

Allora

$$Z_{r_0} \leq \left(\sqrt{\frac{|\phi| x}{\varkappa}(M+T)} + \sqrt{S_{\eta_*(0,x)} E}\right)^2,$$

dove

$$S = \sum_{p>\sqrt{x}} (\log p)^2 \eta_+\left(\frac{p}{x}\right),$$

$$T = C_{\phi,3}(\log x)\left(S - (\sqrt{J} - \sqrt{E})^2\right),$$

$$J = \int_{\mathfrak{M}_{8,r_0}} |S_{\eta_+}(\alpha, x)|\, d\alpha,$$

$$E = \left((C_{\eta_+,0} + C_{\eta_+,2})\log x + (2C_{\eta_+,0} + C_{\eta_+,1})\right) x^{\frac{1}{2}},$$

$$C_{\eta_+,0} = 0.7131 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\sup_{r\geq t} \eta_+(r)\right)^2 dt,$$

$$C_{\eta_+,1} = 0.7131 \int_1^{+\infty} \frac{\log t}{\sqrt{t}} \left(\sup_{r\geq t} \eta_+(r)\right)^2 dt,$$

$$C_{\eta_+,2} = 0.51941 |\eta_+|_\infty^2,$$

$$C_{\phi,3}(K) = \frac{1.04488}{|\phi|_1} \int_0^{\frac{1}{K}} |\phi(w)|\, dw$$

e

$$M = g(r_0)\left(\frac{\log(r_0+1) + c^+}{\log(\sqrt{x}) + c^-} S - (\sqrt{J} - \sqrt{E})\right) + \left(\frac{2}{\log x + 2c^-} \int_{r_0}^{r_1} \frac{g(r)}{r}\, dr + \left(\frac{7}{15} + \frac{-2.14938 + \frac{8}{15}\log\varkappa}{\log x + 2c^-}\right) g(r_1)\right),$$

dove $g(r) = g_{\frac{x}{\varkappa},\phi}(r)$ *con* $K = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{\varkappa}\right)$, $c^+ = 2.3912$ *e* $c^- = 0.6294$.

Concludiamo quindi con i teoremi che dimostrano la Congettura di Goldbach

Teorema (4.5). *Ogni numero dispari* N, *tale che* $N \geq 10^{27}$ *può essere espresso come somma di tre primi dispari.*

Dato che la Congettura di Goldbach Debole è stata verificata per tutti i numeri $N < 8.875 \cdot 10^{30}$ (Appendice A), possiamo concludere che vale il seguente teorema:

Teorema (4.6). *Ogni numero dispari maggiore di* 7 *può essere espresso come somma di tre numeri primi.*

Riferimenti bibliografici

[AS72] Milton Abramowitz and Irene Anne Stegun. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Dover Publications, 1972.

[Bom74] Enrico Bombieri. *Le grand crible dans la théorie analytique des nombres: cours au Collège de France*. Société mathématique de France, 1974.

[BRS62] John Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois J. Math*, 6:64–94, 1962.

[Dav00] Harold Davenport. *Multiplicative Number Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 3rd edition, 12 2000.

[Des75] Jean-Marc Deshouillers. Sur la constante de Schnirelman. *Sdm. Delange–Pisot–Poitou*, 76, 1975.

[DETRZ97] Jean-Marc Deshouillers, Gove Effinger, Herman Te Riele, and Dimitrii Zinoviev. A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis. *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, 3(**15**):99–104, 1997.

[GRJ+65] Izrail Solomonovich Gradshteyn, Iosif Moiseevich Ryzhik, Alan Jeffrey, Daniel Zwillinger, and Scripta Technica. *Table of integrals, series, and products*, volume 6. Academic press New York, 1965.

[Hel13] Harald Andrés Helfgott. Minor arcs for Goldbach's Theorem. *arXiv preprint arXiv:1205.5252v4*, 2013.

[Hel14a] Harald Andrés Helfgott. Major arcs for Goldbach's Theorem. *arXiv preprint arXiv:1305.2897v4*, 2014.

[Hel14b] Harald Andrés Helfgott. The Ternary Goldbach Conjecture is true. *arXiv preprint arXiv:1312.7748v2*, 2014.

[Hel14c] Harald Andrés Helfgott. The Ternary Goldbach problem. *arXiv preprint arXiv:1404.2224v2*, 2014.

[HL20] Godfrey Harold Hardy and John Edensor Littlewood. Some problems of Partitio numerorum; I: A new solution of Warings problem. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1920:33–54, 1920.

[HL23] Godfrey Harold Hardy and John Edensor Littlewood. Some problems of "Partitio numerorum"; III: On the expression of a number as a sum of primes. *Acta Mathematica*, 44(**1**):1–70, 1923.

[HP13] Harald Andrés Helfgott and David Platt. Numerical verification of the Ternary Goldbach Conjecture up to $8.875 \cdot 10^{30}$. *Experimental Mathematics*, 22(**4**):406–409, 2013.

[HW79] Godfrey Harold Hardy and Edward Maitland Wright. *An introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 1979.

[IK04] Henryk Iwaniec and Emmanuel Kowalski. *Analytic Number Theory*, volume 53. American Mathematical Society Providence, 2004.

[JT89] Chen Jingrun and Wang Tianze. On the odd goldbach problem. *Acta Mathematica Sinica*, 32:702–718, 1989.

[LW02] Ming-Chit Liu and Tian-Ze Wang. On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach Conjecture. *Acta Arithmetica*, 105:133–175, 2002.

[McC84] Kevin Snow McCurley. Explicit estimates for the error term in the prime number theorem for arithmetic progressions. *Mathematics of computation*, 42(**165**):265–285, 1984.

[Mon71] Hugh Lowell Montgomery. *Topics in Multiplicative Number Theory*. PhD thesis, University of Cambridge, 1971.

[Mon78] Hugh Lowell Montgomery. The analytic principle of the large sieve. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 84(**4**):547–567, 1978.

[MV73] Hugh Lowell Montgomery and Robert Charles Vaughan. The Large Sieve. *Mathematika*, 20(**02**):119–134, 1973.

[MV07] Hugh Lowell Montgomery and Robert Charles Vaughan. *Multiplicative Number Theory I: Classical theory*, volume 97. Cambridge University Press, 2007.

[OeSHP13] Tomás Oliveira e Silva, Siegfried Herzog, and Silvio Pardi. Empirical verification of the even Goldbach conjecture, and computation of prime gaps, up to $4 \cdot 10^{18}$. *Math. Comp., to appear*, 2013.

[Olv59] Frank William John Olver. Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large orders. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, 63(**2**):131–169, 1959.

[Olv61] Frank William John Olver. Two inequalities for parabolic cylinder functions. In *Proc. Cambridge Philos. Soc*, volume 57, pages 811–822. Cambridge Univ Press, 1961.

[Olv74] Frank William John Olver. *Asymtotics and special functions.* Academic Press, New York, 1974.

[Olv10] Frank William John Olver. *NIST handbook of mathematical functions.* Cambridge University Press, 2010.

[Pla11] David Platt. *Computing degree 1 L-functions rigorously.* PhD thesis, University of Bristol, 2011.

[Ram95] Olivier Ramaré. On šnirel'man's constant. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 22(**4**):645–706, 1995.

[Ram10] Olivier Ramaré. On Bombieri's asymptotic sieve. *Journal of Number Theory*, 130(**5**):1155–1189, 2010.

[Ram12a] Olivier Ramaré. Explicit estimates on several summatory functions involving the Moebius function. *Submitted to Manuscripta Mathematica, page 32pp*, 2012.

[Ram12b] Olivier Ramaré. From explicit estimates for the primes to explicit estimates for the Moebius function. *Acta Arith*, 2012.

[Ram13a] Olivier Ramaré. Explicit estimates on the summatory functions of the Moebius function with coprimality restrictions. *Submitted, page 12pp*, 2013.

[Ram13b] Olivier Ramaré. A sharp bilinear form decomposition for primes and Moebius function. *Submitted to Acta Mathematica Sinica, 45pp*, 2013.

[Ros41] John Barkley Rosser. Explicit bounds for some functions of prime numbers. *American Journal of Mathematics*, pages 211–232, 1941.

[RR09] Olivier Ramaré and Surya Devarakolla Ramana. *Arithmetical aspects of the large sieve inequality.* Hindustan Book Agency, 2009.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* Tata McGraw-Hill Education, 1987.

[RV83] Hans Riesel and Robert Charles Vaughan. On sums of primes. *Arkiv för Matematik*, 21(**1**):45–74, 1983.

[Sao98] Yannick Saouter. Checking the odd Goldbach conjecture up to 10^{20}. *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*, 67:863–866, 1998.

[Sch30] Lev Genrikhovich Schnirelman. On additive properties of integers. *Izv. Donsk. Politehn. Inst.(Novočerkask)*, 14:3–28, 1930.

[Sch76] Lowell Schoenfeld. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. ii. *Mathematics of Computation*, pages 337–360, 1976.

[Sin93] Matti Kalevi Sinisalo. Checking the Goldbach conjecture up to $4 \cdot 10^{11}$. *Mathematics of Computation*, 61:931–934, 1993.

[Str08] Andreas Strombergsson. Analytic Number Theory-lecture notes based on Davenport's book, 2008.

[Tao14] Terence Tao. Every odd number greater than 1 is the sum of at most five primes. *Mathematics of Computation*, 83(**286**):997–1038, 2014.

[Vau77] Robert Charles Vaughan. Sommes trigonométriques sur les nombres premiers. *CR Acad. Sci. Paris Sér. AB*, 285(**16**):A981–A983, 1977.

[Vin37] Ivan Matveevič Vinogradov. Representation of an odd number as a sum of three primes. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 15, pages 291–294, 1937.

[Wan02] Yuan Wang. *Goldbach conjecture*, volume 4. World scientific, 2002.