Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Sintesi

Sugli zeri della funzione Zeta di Riemann, il metodo di Vinogradov

Candidato

Sara Borri

Relatore

Prof. Francesco Pappalardi

Anno Accademico 2015/2016
Ottobre 2016

Introduzione

L'argomento che approfondiremo in questa tesi riguarda l'ipotesi di Riemann, problema formulato nel 1859 dallo stesso Riemann e riproposto poi successivamente, nel 1900, a Parigi, al Congresso Internazionale dei matematici.
Il punto di partenza di tale problema è la funzione zeta di Riemann $\zeta(s)$, la quale riveste una fondamentale importanza sia nella Teoria Analitica dei Numeri sia in altri ambiti, come in fisica, nella teoria della probabilità e statistica. Osserviamo che il primo ad aver studiato tale funzione sembra sia stato Eulero, il quale considerò soltanto i valori reali si s. Fu Riemann che, successivamente, estese lo studio della funzione zeta per una variabile complessa s, utilizzando una notazione che ad oggi è ancora quella più comune. Egli infatti scrisse s come $s = \sigma + it$, con σ, t valori reali. In particolare, noi ci occuperemo di analizzare tutti gli sviluppi fatti nel tempo rispetto al calcolo degli zeri della funzione zeta di Riemann, fino ad arrivare al metodo di Vinogradov. Tale metodo costituisce proprio il centro della tesi, poiché è grazie ad esso se ancora oggi si stanno facendo progressi in questo ambito, e non solo.
Nel primo Capitolo forniremo la definizione della funzione ζ e alcune sue proprietà, fino ad arrivare alla cosiddetta *ipotesi di Riemann*. Tale congettura riguarda la distribuzione degli zeri non banali della funzione zeta di Riemann. Più nello specifico l'ipotesi sostiene che le radici non banali della funzione zeta ζ (cioè quelle che si trovano all'interno della regione $0 \leq Re(s) \leq 1$, detta *striscia critica*) si trovano lungo la retta descritta dall'equazione $s = 1/2 + it$ (detta *retta critica*) con t numero reale e i unità immaginaria.
Questo problema è comunque tuttora ancora aperto ed è uno dei più importanti di tutta la matematica, poiché implicherebbe delle notevoli conseguenze sulla distribuzione dei numeri primi. L'ipotesi infatti crea una connessione molto importante tra i due oggetti matematici apparentemente lontani.
Attualmente, l'ipotesi è stata verificata per oltre 10 miliardi di miliardi di zeri. Tali prove sono state rese possibili grazie a dei metodi proposti da vari matematici nell'ultimo secolo.
Tuttavia, nonostante siano state fatte delle stime sempre più precise, l'ipotesi rimane ancora lontana dall'essere completamente dimostrata. Infatti, non è ancora noto se esiste un $\epsilon > 0$ tale che tutti gli zeri $\sigma + it$ di ζ stiano in $\sigma < 1 - \epsilon$.
In particolare, l'ipotesi di Riemann corrisponde a $\epsilon = \frac{1}{2}$, ma vedremo che grazie al Teorema di Hadamard e de la Vallée Poussin l'asserzione è vera anche per $\epsilon = 1$. Proprio de la Vallée Poussin fu il primo che riuscì a estendere la regione priva di

zeri. Successivamente il suo risultato fu migliorato da Littlewood, poi da Chudakov e infine da Korokov e Vingradov.
Nel secondo Capitolo, dunque, analizzeremo i vari progressi fatti nello studio della regione priva di zeri di $\zeta(s)$, così da poter poi dedicare l'intero terzo Capitolo al metodo di Vinogradov, che finora risulta essere il migliore risultato riguardo la regione priva di zeri. Esso infatti ad oggi costituisce la disuguaglianza record ottenuta in questo studio.

1. Definizione e proprietà elementari di $\zeta(s)$

Definiamo prima di tutto come *serie di Dirichlet* una qualunque serie della seguente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

dove a_n e s sono numeri complessi.
La funzione zeta di Riemann è l'esempio più noto di tale serie e presenta la seguente scrittura:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2}$$

Eulero è stato il primo a fornire una analisi sostanziale di questa serie di Dirichlet, ma limitò la sua analisi alla retta reale.
Il suo contributo più importante alla teoria della funzione zeta è dato dalla sua formula prodotto. Eulero, infatti, osservò che ogni intero positivo può essere scritto in modo unico come prodotto di potenze di primi discreti. Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, possiamo scrivere $n = \prod_{p_i} p_i^{e_i}$, dove i p_i variano tra tutti i numeri primi e gli e_i sono interi non negativi. Gli esponenti e_i variano al variare di n, ma è chiaro che se consideriamo ogni $n \in \mathbb{N}$ avremo ogni possibile combinazione di esponenti. Perciò, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + ...)$, dove il prodotto infinito è considerato sopra tutti i primi.
Esaminando la convergenza della serie infinita e del prodotto infinito, si ottiene facilmente la formula del prodotto di Eulero:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{3}$$

con $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$.
Dal fatto che i prodotti infiniti convergenti non si annullano mai possiamo dedurre che $\zeta(s) \neq 0$. Le regioni nel piano complesso dove $\zeta(s) \neq 0$ sono conosciute come regioni libere dagli zeri per $\zeta(s)$.

La funzione zeta, così come è definita, diverge per $Re(s) \leq 1$. Perciò, la serie in (2) non definisce la funzione zeta di Riemann al di fuori della regione $Re(s) > 1$. In ogni caso, osserviamo che possiamo estendere la funzione zeta analiticamente con l'eccezione di un unico punto. Infatti, La funzione $\zeta(s)$, definita per $\sigma > 1$, ammette una continuazione analitica sull'intero piano complesso, avendo come unico punto di singolarità un polo con residuo 1 in $s = 1$.

Riprendendo poi la definzione della *funzione Gamma*, possiamo dedurre una *equazione funzionale* per la funzione zeta, ossia:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s) \tag{4}$$

Ma vediamo meglio gli zeri della funzione zeta.
Prima di tutto, osserviamo che i poli di $\Gamma(s)$ sono semplici e situati in $s = -2n$ con $n = 1, 2, 3, ...$ Questi poli, derivanti quindi dai poli della funzione gamma, sono i cosiddetti zeri triviali o banali per ζ. Tutti gli altri zeri, quelli cioè non banali, appartengono alla striscia verticale $0 \leq Re(s) \leq 1$ e sono simmetrici rispetto alla retta verticale $Re(s) = 1/2$ e rispetto alla retta reale $Im(s) = 0$.

Nella sua memoria, Riemann fece un commento sugli zeri di $\zeta(s)$. Da qui, venne fomulata quella che oggi è nota come *ipotesi di Riemann*, secondo cui tutti gli zeri non banali della funzione zeta appartengono alla retta critica $Re(s) = 1/2$.
L'ipotesi di Riemann è ancora molto lontana dall'essere dimostrata e non è ancora noto se esista o meno un particolare $\epsilon > 0$ tale che tutti gli zeri di $\zeta(s)$ siano in $Re(s) < 1 - \epsilon$. L'ipotesi di Riemann corrisponde a $\epsilon = 1/2$ e, grazie al teorema di Hadamard e de la Vallée Poussin, l'asserzione è dimostrata essere vera per $\epsilon = 0$. Tuttavia, qualche risultato parziale è stato ottenuto; il primo ad estendere la regione priva di zeri fu de la Vallèe Poussin.

2. Distribuzione degli zeri della funzione $\zeta(s)$

La questione della regione libera dagli zeri sembra essere legata all'estensione della sfera di influenza del prodotto di Eulero.

2.1 Gli di Hadamard e de la Vallée Poussin

Dal prodotto di Eulero segue dunque che $\zeta(s)$ non ha zeri per $\sigma > 1$. Al fine di analizzare la Teoria dei Numeri Primi e anche di determinare la natura di $\zeta(s)$, è

necessario estendere il più possibile la regione libera dagli zeri.
La questione della regione libera dagli zeri sembra essere legata alla regione di convergenza del prodotto di Eulero. Notiamo, però, che capire quanto effettivamente il prodotto di Eulero influisca la striscia alla sinistra della retta $\sigma = 1$, non è così semplice da dimostrare.

Affermiamo allora la seguente uguaglianza

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \tag{5}$$

con $\sigma > 1$ e $|\mu(n)| \leq 1$.
Inoltre, $\mu(n)$ è definita in modo tale che $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$ se n è il prodotto di k differenti primi, e $\mu(n) = 0$ se n contiene dei fattori con una potenza maggiore di 1.
Da questa uguaglianza, per σ vicino a 1, si ha che

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \zeta(\sigma) < \frac{A}{\sigma - 1}$$

cioè $|\zeta(s)| > A(\sigma - 1)$ dove A è una costante positiva.
Da qui, se $\zeta(s)$ ha uno zero su $\sigma = 1$, allora questo deve essere uno zero semplice. Però, per mostrare che non ci possono essere altri zeri semplici è richiesta un'ulteriore argomentazione. Infatti, fu provato indipendentemente da Hadamard e de la Vallée Poussin nel 1896 che $\zeta(s)$ *non ha zeri sulla linea* $\sigma = 1$. In realtà, il principale oggetto di entrambi questi matematici era quello di provare il Teorema dei numeri primi. Questo teorema ci dà una forma asintotica per la funzione del conteggio dei numeri primi $\pi(n)$. In particolare, i due matematici dimostrarono il teorema sfruttando il fatto che la funzione zeta non ha zeri lungo la retta $\sigma = 1$.

2.2 I lavori di Hardy e Littlewood

Due matematici che diedero rilevanti risultati sulla distribuzione degli zeri della funzione zeta furono anche Godfrey Harold Hardy (1877-1947) e John Edensor Littlewood (1885-1977). Dal 1911, collaborarono a molti lavori sull'Analisi Matematica e Teoria Analitica dei Numeri. In particolare, proposero due congetture, riguardanti le distanze tra zeri reali di $\zeta(1/2 + it)$ e la densità di zeri della funzione zeta di Riemann, in precisi intervalli.
Particolarmente importante è il teorema di Hardy, il quale afferma che esiste un

numero infinito di zeri di $\zeta(s)$ sulla retta critica $Re(s) = 1/2$.

Spesso si è tentato di attaccare l'ipotesi di Riemann a partire da questa prospettiva, ossia dimostrando condizioni necessarie via via più restrittive. Selberg, ad esempio, dimostrò che una proporzione sostanziale degli zeri di $\zeta(s)$ appartengono alla retta critica. Levinson, poi, migliorò questa stima, affermando che almeno $1/3$ degli zeri appartengono alla retta critica. Il miglior risultato ottenuto finora, però, è dovuto a Conrey, che ha dimostrato che almeno $2/5$ degli zeri appartengono alla retta critica.

Inoltre, un modo per calcolare gli zeri di una qualunque funzione a valori reali è determinare piccoli intervalli in cui la funzione cambia di segno. Questo metodo non può essere applicato direttamente ad arbitrarie funzioni complesse. Dunque, al fine di calcolare zeri di $\zeta(s)$, che appartengono alla retta critica, dobbiamo trovare una funzione a valori reali i cui zeri siano esattamente gli zeri di $\zeta(s)$ su tale retta critica.
Sfruttiamo perciò la funzione

$$\xi(s) = \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s).$$

Abbiamo che la funzione $\xi(s)$ è a valori reali sulla retta critica, perciò troveremo gli zeri semplici di $\xi(s)$ determinando dove la funzione cambia segno.
Adesso poniamo $s = \frac{1}{2} + it$ e sviluppiamo ξ:

$$\xi\Big(\frac{1}{2}+it\Big) = \Big(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{2}+it\Big)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\Big)\zeta\Big(\frac{1}{2}+it\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}+t^2\Big)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\Big)\zeta\Big(\frac{1}{2}+it\Big) =$$

$$= \Big[e^{Re\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)}\pi^{-\frac{1}{4}}\Big(\frac{t^2}{2}\Big)-\frac{1}{8}\Big] \times \Big[e^{iIm\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)}\pi^{-\frac{it}{2}}\zeta\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\Big].$$

Ora, poiché il fattore all'interno della prima parentesi quadra è sempre un numero reale negativo, il segno di $\xi(\frac{1}{2}+it)$ dipende esclusivamente dal segno del secondo fattore.

Definiamo quindi la funzione di Hardy come

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\Big(\frac{1}{2} + it\Big),$$

dove $\theta(t)$ è data da

$$\theta(t) = Im\Big(\log\Gamma\Big(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\Big)\Big) - \frac{t}{2}\log\pi.$$

Ora è chiaro che il segno di $\xi(\frac{1}{2}+it)$ è opposto a quello di $Z(t)$. A questo punto sembra che, poiché $\zeta\Big(\frac{1}{2} + it\Big)$ appare nella formula di $Z(t)$ non abbiamo ottenuto alcuna nuova informazione utile. Tuttavia, la formula di Riemann-Siegel, come vedremo, ci consente di calcolare efficientemente $Z(t)$ con l'obiettivo di determinare zeri di $\zeta\Big(\frac{1}{2} + it\Big)$.

3. Il metodo di Vinogradov

Ivan Matveevič Vinogradov(1891- 1983) è stato un matematico sovietico, uno dei creatori della moderna teoria analitica dei numeri.
Nella Teoria Analitica dei Numeri il metodo di Vinogradov, da lui ideato, è una tecnica che si applica a molti problemi nel contesto della stima delle somme esponenziali. Essenzialmente, rende possibile la riduzione di una sommatoria complicata di numeri primi in alcune sommatorie più semplici. Tali somme presentano la formula seguente

$$S = \sum_{1\leq x\leq P} \exp(2\pi i f(x)).$$

Con l'aiuto di questo metodo, inoltre, Vinogradov affrontò anche diverse questioni, tra cui la congettura debole di Goldbach e lo studio della regione priva di zeri della funzione zeta di Riemann. Quest'ultima riguarda proprio ciò di cui andremo a trattare in questo capitolo.

3.1 Il teorema del valor medio di Vinogradov

Un Teorema del valor medio ci dà un limite per il numero di soluzioni intere $J = J(P; n, k)$ del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x_1 + ... + x_k = y_1 + ... + y_k \\ .... \\ .... \\ .... \\ x_1^n + ... + x_k^n = y_1^n + ... + y_k^n \end{cases} \tag{6}$$

Usando il fatto che

$$\int_0^1 \exp{(kx)}\, dx = \int_0^1 e^{2\pi i k x}\, dx = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0\ , \\ 0 & \text{se } k \text{ è un intero non nullo} \end{cases} \tag{7}$$

facilmente otteniamo la seguente formula

$$J = J(P; n, k) = \int_0^1 ... \int_0^1 |\sum_{x \leq p} \exp{(2\pi f(x))}|^{2k}\, d\alpha_1 ... d\alpha_n \tag{8}$$

dove $f(x) = \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n$.
In particolare osserviamo che, usando il fatto che $|z|^2 = z\bar{z}$ e riprendendo la (7), è facile vedere che $J_{k,n}(P)$, così come è definito in (8), rappresenta proprio il numero delle soluzioni intere del sistema di equazioni (6).
Più generalmente, definiamo $J_{k,n}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, per dati interi $\lambda_1, ..., \lambda_n$, come il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + ... + x_k - y_1 - ... - y_k = \lambda_1 \\ .... \\ .... \\ .... \\ x_1^n + ... + x_k^n - y_1^n - ... - y_k^n = \lambda_n \end{cases} \tag{9}$$

negli interi $1 \leq x_1, ..., x_n \leq P$, così che in questa notazione si ha che $J_{k,n}(P) = J_{k,n}(0, ..., 0)$. Inoltre, la formula (8) ci dice anche che $J = J(P; n, k)$ è il valore medio della $2k - esima$ potenza del modulo di una somma trigonometrica avente un polinomio di grado $n - esimo$ all'esponente.
Osserviamo anche che, usando la (7), abbiamo

$$J_{k,n}(\lambda_1, ..., \lambda_n) =$$

$$= \int_0^1 ... \int_0^1 |\sum_{x \leq P} e(\alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n)|^{2k} \times e(-\alpha_1 \lambda_1 - ... - \alpha_n \lambda_n)\, d\alpha_1 ... d\alpha_n$$

$$|\int_0^1 ... \int_0^1 |\sum|^{2k} e(-...)\, d\alpha_1 ... d\alpha_n| \leq$$

$$\int_0^1 ... \int_0^1 |\sum_{x \leq P} e(\alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n)|^{2k}\, d\alpha_1 ... d\alpha_n = J_{k,n}(P);$$

dunque, per qualche intero $\lambda_1, ..., \lambda_n$, si ha che

$$J_{k,n}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \leq J_{k,n}(P). \tag{10}$$

Quando $x_1, ..., x_{2k}$ prende tutti i possibili P^{2k} valori, allora il membro di sinistra del sistema (9) assume tutti i possibili valori $\lambda_1, ..., \lambda_n$, che formalmente possono essere spiegati nel seguente modo

$$\sum_{\lambda_1, ..., \lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = P^{2k}. \tag{11}$$

Il numero degli addendi in (11) è sicuramente finito, poiché dal sistema (9) deduciamo immediatamente che

$$|\lambda_1| < kP, \quad |\lambda_2| < kP^2, \quad |\lambda_n| < kP^n. \tag{12}$$

Inoltre, abbiamo banalmente che $J_{k,n}(P) \leq P^{2k}$, e osserviamo pure che $J_{k,n}(P)$ è chiaramente non decrescente come funzione di k o P.
Immediatamente, otteniamo un limite dal basso per $J_{k,n}(P)$. Infatti, sfruttando (10) e (12), segue subito che

$$P^{2k} = \sum_{\lambda_1, ..., \lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \leq$$

$$\leq J_{k,n}(P) \sum_{\lambda_1, ..., \lambda_n} 1 \leq J_{k,n}(P)(2k)P ... (2k)P^n =$$

$$= J_{k,n}(P)(2k)^n P^{n(n+1)/2},$$

che ci dà la seguente disuguaglianza

$$J_{k,n}(P) \geq (2k)^{-n} P^{2k-n(n+1)/2} \tag{13}$$

e questo è un non ovvio limite se $k > \frac{1}{4}(n^2+n)$.
Inoltre, abbiamo che

$$|\sum_{x \leq P} e(\alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n)|^{2k} = \sum_{\lambda_1,...,\lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1,...,\lambda_n) e(-\alpha_1\lambda_1 - ... - \alpha_n\lambda_n), \tag{14}$$

se eleviamo il membro di sinistra di tale equazione alla potenza $2k - esima$ e raccogliamo le somme con i vari $\lambda_1,...,\lambda_n$ definiti in (9).
Se poi sostituiamo nella (14) xy al posto di x e sommiamo, otteniamo pure che

$$\sum_{x \leq P} |\sum_{y \leq P} e(\alpha_1 xy + ... + \alpha_n x^n y^n)|^{2k} \leq$$

$$\sum_{\lambda_1,...,\lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1,...,\lambda_n)|\sum_{x \leq P} e(-\alpha_1\lambda_1 x - ... - \alpha_n\lambda_n x^n)|. \tag{15}$$

Se noi consideriamo solo le prime $n-1$ equazioni in (9), allora il numero delle loro soluzioni è $J_{k,n-1}(\lambda_1,...,\lambda_n)$ e se facciamo sì che $|\lambda_n|$ prenda tutti i possibili valori (kP^n) nell'ultima equazione in (9), allora otteniamo che

$$\sum_{|\lambda_n|} J_{k,n}(\lambda_1,...,\lambda_n) = J_{k,n-1}(\lambda_1,...,\lambda_{n-1}) \tag{16}$$

Perciò, da tutto il ragionamento appena fatto, possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema 3.1:
Siano n, k e τ numeri naturali. Allora, per $k \geq n\tau$, $P \geq 1$ si ha il limite

$$J = J(P; n, k) \leq n^{2\Delta n} 2^k \kappa (8k)^{2n\tau} P^{2k-\Delta} \tag{17}$$

dove

$$\Delta = \Delta(\tau) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{2}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{\tau},$$

$$\kappa = \kappa(\tau) = n^2\tau\frac{n(n+1)}{2}\tau - \frac{n^2(n-1)}{2}\Big(1 - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{\tau}\Big) < \frac{3(n+1)^2}{2}\tau.$$

3.2 Limiti per le somme zeta

Usando il Teorema del valor medio, si possono ottenere stime delle somme trigonometriche sfruttando le somme esponenziali. Tali somme si presentano nella Teoria della funzione zeta di Riemann nel modo seguente:

$$S = \sum_{a<n\leq b} n^{it} \tag{18}$$

una somma S di questo tipo si chiama appunto *somma zeta*.

Adesso, enunciamo un teorema molto importante rispetto a delle stime sulle somme zeta:

Teorema 3.2:
Esistono due costanti c, γ positive tali che il seguente limite vale per $2 \leq N \leq t$:

$$|\sum_{n=1}^{N} n^{it}| \leq cN \exp\Big(-\gamma\frac{\log^3 N}{\log^2 t}\Big). \tag{19}$$

In realtà, andremo a dimostrare una versione di tale teorema che è ancora più forte e che presenta il seguente enunciato:

Teorema 3.3:
Se definiamo

$$S(t; N, N_1) = \sum_{N<n\leq N_1\leq 2N} n^{it},$$

con $N \leq t/2$, allora uniformemente in N, N_1 e t abbiamo che

$$S(t;N,N_1) \ll N \exp\Big(-\frac{\log^3 N}{10^5 \log^2 t}\Big) \tag{20}$$

In effetti, provando tale teorema, dimostro anche il Teorema 3.2. Questo è possibile grazie al *metodo diatico*. Sostanzialmente, se supponiamo valga la condizione del Teorema 3.3, vogliamo sia vera anche quella nel Teorema 3.2, ma vediamolo.
Per non creare ambiguità di notazione, riscriviamo innanzitutto la (18) nel seguente modo

$$\sum_{0\le n\le M} n^{it} \le M \exp\Big(-\gamma \frac{log^3 M}{\log^2 t}\Big).$$

Prima di tutto, ripartiamo l'intervallo $[0,M]$ in 2^n intervalli (e quindi ho fatto la ripartizione diadica dell'intervallo). In questo modo si ha che

$$\sum_{0\le n\le M} n^{it} \le \sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{2^j<n<2^{j+1}} n^{it}$$

dove $2^{\alpha+1} > M$. In tal modo si ha che $\alpha > (\log_2 M) - 1$, quindi possiamo scegliere $\alpha = [\log_2 M]$. Ma allora, dal Teorema 3.3 si ha che

$$\sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{2^j<n<2^{j+1}} n^{it} \le c' \sum_{j=1}^{\alpha} 2^j \exp\Big(-\frac{1}{10^5}\frac{\log^3 2^j}{log^2 t}\Big) \le c' M \exp\Big(-\frac{1}{10^5}\frac{\log^3 M}{log^2 t}\Big)\alpha,$$

dove l'ultima disuguaglianza è dovuta al fatto che $2^j < 2^\alpha < M$. Osserviamo inoltre che α assume dei valori molto piccoli perciò può essere incorporato nella costante c'.
In più, è importante notare il legame tra t ed M. Infatti, poiché $t > M$, si ha che $\frac{\log^3 M}{log^2 t}$ ci dà una stima utile solamente quando M è molto vicino a t, perché in tal caso si ha l'esponenete molto vicino a 0. Altrimenti dà un valore irrilevante.
Da tale ragionamento si ha quindi che vale la (18), grazie alla validità della (19).

Da tale Teorema è facile ottenere delle stime per $\zeta(s)$ rispetto alla regione critica. In particolare, segue il seguente:

Teorema 3.4:
Esiste una costante $\eta > 0$ tale che per $1-\eta \le \sigma \le 1$, uniformemente in σ si ha che

$$\zeta(\sigma+it) \ll t^{122(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3} t \tag{21}$$

Tale risultato implica che

$$\zeta(1+it) \ll \log^{2/3} t \tag{22}$$

il quale è il miglior risultato conosciuto per $\zeta(1+it)$, anche se l'ipotesi di Riemann sostiene il limite più forte $\zeta(1+it) \ll \log\log t$.

Adesso enunciamo un Teorema che ci dà rilevanti informazioni su $\zeta(s)$ nella regione $Re(s) < 1$:

Teorema 3.5:
Esiste una costante positiva γ_1 tale che il limite

$$\zeta(\sigma+it) = O(\log^{2/3}|t|)$$

vale per

$$\sigma \geq 1 - \frac{\gamma_1}{\log^{2/3}|t|}, \qquad |t| \geq 2.$$

Segue da questi ultimi due teoremi un corollario:

Corollario 3.1:
Supponiamo che $c > 0$ è un arbitrario numero fissato e prendiamo $t \geq 10$. Allora esiste una costante $c_1 > 0$ tale che vale il limite

$$\zeta(s) = O(\log^{c_1} t)$$

per $\sigma \geq 1 - c(\log\log t)^{2/3}\log^{-2/3} t$.

Tale Corollario segue dal Teorema 3.4 quando $\sigma \leq 1$ e dal Teorema 3.5 quando $\sigma > 1$.

Concludiamo quindi questo capitolo con il seguente teorema, che ci dà una rilevante stima per gli zeri di $\zeta(s)$. Tale teorema è il punto cruciale della tesi.

Teorema 3.6:
Esiste una costante c positiva tale che la funzione zeta di Riemann $\zeta(s)$ non ha zeri nella seguente regione del piano complesso:

$$\sigma \geq 1 - c(\log\log t)^{-1/3}\log^{-2/3} t, \qquad t \geq 10. \tag{23}$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, possiamo assumere $t \geq t_0 > 0$, dove t_0 è abbastanza grande. Definiamo $\rho = \sigma + it$ uno zero di $\zeta(s)$. Allora diciamo che

$$\sigma = 1 - a(\log\log t)^{-1/3}\log^{-2/3} t$$

con $0 \leq a \leq 1$ e proviamo che $a \geq c_2$ dove c_2 è una particolare costante che non tende a zero. In questo modo, la quantità non può andare a zero, quindi cresce, e abbiamo la validità della disuguaglianza della tesi.
Perciò, consideriamo $s_0 = \sigma_0 + it$, dove $\sigma_0 = 1 + b(\log t)^{-2/3}(\log\log t)^{-1/3}$, con $b = \frac{c}{52(c_1+1)}$, e c, c_1 sono delle costanti positive definite nel Corollario 3.1.
Consideriamo la circonferenza di raggio r attorno a s_0, dove $r = c(\log\log t)^{2/3}\log^{-2/3} t$.
Inoltre, essendo $t \geq t_0$, abbiamo che ρ è all'interno della circonferenza di raggio $0.5r$ centrata in s_0.

Enunciamo adesso un Teorema che poi sfrutteremo nella dimostrazione:

sia F(s) una funzione analitica in un intorno del disco $|s - s_0| \leq r$, $F(s_0) \neq 0$ *e supponiamo che in tale disco valga la relazione* $|F(s)/F(s_0)| \leq M$ *per* $M = \max_{|s|=R} Re(F(s) - F(s_0)$. *Allora, se* $F(s) \neq 0$ *nella regione* $|s - s_0| \leq r/2$, *con* $Re(s - s_0) \geq 0$ *si ha che:*
a) $Re\Big(\frac{F'(s_0)}{F(s_0)}\Big) \geq -\frac{4}{r}\log M$;
b) $Re\Big(\frac{F'(s_0)}{F(s_0)}\Big) \geq -\frac{4}{r}\log M + Re\Big(\frac{1}{s_0-\rho}\Big)$, *dove* ρ *è uno zero di* $F(s)$ *nella regione* $|s - s_0| \leq r/2$, *con* $Re(s - s_0) < 0$.

Allora, poniamo $F(s) = \zeta(s)$ e troviamo un limite per $|\zeta(s)/\zeta(s_0)|$ nel disco $|s - s_0| \leq r$.
Dal Corollario 3.1 abbiamo che vale $\zeta(s) = O(\log^{c_1} t)$ in tale cerchio.

Inoltre notiamo anche che $|\zeta(s_0)|^{-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma_0} \leq 1 + \int_1^{\infty} u^{-\sigma_0}\, du = 1 + (\sigma_0 - 1)^{-1}$.
Perciò, abbiamo che

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right| \leq M = c_2 \log^{c_1+t} t.$$

Lo stesso limite si trova anche nel disco $|s - s_1| \leq r$, dove $s_1 = \sigma_0 + 2it$. In più, poiché $\zeta(s) \neq 0$ nella regione $|s - s_0| \leq 0.5r$, $Re(s - s_0) \geq 0$ e anche nella regione $|s - s_1| \leq 0.5r$, $Re(s - s_1) \geq 0$, segue dal Teorema sopra enunciato che

$$-Re\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} \leq \frac{4}{r}\log M - Re\frac{1}{s_0 - \rho} \leq \Big(\frac{5(c_1+1)}{c} - \frac{1}{b+a}\Big)(\log^{2/3} t)(\log\log t)^{1/3},$$

facendo ovviamente tutte le sostituzioni con i valori sopra definiti.
Si ha pertanto anche che

$$-Re\frac{\zeta'(s_1)}{\zeta(s_1)} \leq \frac{4}{r}\log M \leq \frac{5(c_1+1)}{c}(\log t)^{2/3}(\log\log t)^{1/3};$$

$$-Re\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} \leq \frac{1}{\sigma_0 - 1} + c_3 \leq \frac{1}{b}(\log t)^{2/3}(\log\log t)^{1/3}.$$

Adesso, usando la solita disuguaglianza

$$0 \leq 3\Big(-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)}\Big) + 4\Big(-Re\frac{\zeta'(\sigma_0+it)}{\zeta(\sigma_0+it)}\Big) + \Big(-Re\frac{\zeta'(\sigma_0+2it)}{\zeta(\sigma_0+2it)}\Big),$$

otteniamo facilmente che

$$0 \leq \frac{3}{b} - \frac{4}{b+a} + \frac{26(c_1+1)}{c};$$

da cui segue che

$$a \geq \frac{1 - b \cdot 26(c_1+1)c^{-1}}{3b^{-1} + 26(c_1+1)c^{-1}} = \frac{c}{364(c_1+1)}$$

e si ha quindi immediatamente la tesi. $\square$

Conclusioni

La presente tesi si è occupata dunque della funzione zeta ζ di Riemann e dell'esposizione di alcuni dei risultati più rilevanti ottenuti fino ad oggi. La funzione, infatti, riveste un ruolo fondamentale nella Teoria dei Numeri e riguarda una delle più importanti questioni aperte nella matematica, appunto l'Ipotesi di Riemann.
Il lavoro, quindi, ha provveduto innanzitutto ad analizzare le proprietà della funzione ζ e successivamente alla spiegazione di alcuni risultati, riguardanti la funzione stessa, ottenuti nell'ultimo secolo.
Interessanti e sempre più precise, infatti, sono le stime sulla regione libera degli zeri. Il miglior risultato raggiunto, come detto diverse volte e analizzato nel Capitolo 3, è dovuto a Vinogradov ed è grazie proprio a tale metodo che la (3.42) è stata nel corso degli anni sempre più affinata.
In realtà, Vinogradov raggiunse i suoi risultati grazie anche agli studi del suo allievo Korobov, il quale lavorò in modo indipendente e sfruttando idee di precedenti opere di Vinogradov. Il suo contributo, infatti, fu necessario per dimostrare la stima di ζ in un intorno della retta $\sigma = 1$, migliorando così la regione libera dagli zeri. Per tale motivo, molto spesso si parla di *metodo di Vinogradov-Korobov* e non soltanto di Vinogradov.

Il principale strumento che ha reso possibile ciò è il limite superiore della funzione ζ vicino la retta $\sigma = 1$. In particolare, una delle forme più recenti di tale maggiorazione è dovuta a Richard, il quale afferma che

$$\zeta(\sigma + it) \leq A|t|^{B(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3} t \tag{24}$$

con $|t| \geq 3$. Tale stima, dunque, migliora ulteriormente il risultato ottenuto nel Teorema 3.5.
Hans-Egon Richert, più precisamente, provò tale relazione con $B = 100$ ed A una costante positiva non specificata. Cheng addirittura dimostrò la (3.43) con $A = 175$, $B = 46$, e questo gli fece dedurre che la (3.42) vale per ogni $|t| \geq 3$ con la costante $c = 1/990$.
Recentemente, inoltre, sono state date versioni della (3.42) più esplicite, con precisi valori della costante c valide per $|t|$ sufficientemente grande. Ad esempio, Popov dimostrò che la (3.42) vale con $c = 0.00006888$. Heath-Brown invece la provò con $c \approx 0.0269B^{-2/3}$.

In realtà, si cercò sempre più di esplicitare la costante c in funzione della costante B. Uno dei principali risultati, in questo senso, è il seguente:

$$1-\sigma \leq \frac{0.05507B^{-2/3}}{(\log|t|)^{2/3}(\log\log|t|)^{1/3}}.$$

Se prendiamo, ade esempio, $B = 4.45$ tale relazione ci dà la (3.42) con $c = 1/49.13$. Inoltre, per provare esplicitamente la regione libera dagli zeri del tipo (3.42) per $|t| \geq 3$, spesso si è fatto uso di alcune stime classiche sulla regione libera dagli zeri con dei valori minori di $|t|$. Viene cioè ripresa la stima di de la Vallée Poussin, secondo cui

$$1-\sigma \leq \frac{c}{\log|t|}.$$

Ad esempio, Stechkin riuscì a provare tale disuguaglianza con $c = 1/9.646$. Piccoli rifinimenti furono successivamente fatti da Rosser e Schoenfeld e in seguito da Ramaré e Rumely.
Volendo ora tornare ad una regione libera dagli zeri del tipo di Vinogradov, grazie anche all'utilizzo del limite proposto da van der Corput $|\zeta(1/2+it)| \ll t^{1/6}\log|t|$ per $|t| \geq 3$, venne prodotta la seguente regione libera dagli zeri

$$1-\sigma \leq \frac{1}{C_1(\log|t| + 6\log\log|t| + C_2)}$$

dove nello specifico $C_1 \approx 3.36$ e C_2 è una costante esplicita. Questa stessa regione segue anche dal metodo di Heath-Brown con la stessa costante C_1, ma una C_2 più grande.
Un altro gran risultato, proveniente sempre dall'utilizzio del metodo di Vinogradov, è che la funzione $\zeta(\sigma+it)$ non ha zeri per $|t| \geq 3$ nella regione per cui

$$1-\sigma \leq \frac{1}{57.54(\log|t|)^{2/3}(\log\log|t|)^{1/3}}.$$

Si può quindi concludere che effettivamente il risultato ottenuto grazie al metodo di Vinogradov rappresenta la migliore disuguaglianza nota per la regione priva di zeri. Questo vale se si eccettua per alcuni miglioramenti alla costante c, il più recente dei quali è dovuto a Ford, che ha dimostrato che si può prendere $c = 1/57.54$.
Ad ogni modo, per quanto alcuni risultati parziali siano stati ottenuti, l'ipotesi di Riemann è ancora lontana dall'essere completamente dimostrata. La prova di tale congettura è molto importante perché, come già accennato, significherebbe definire

una regola matematica capace di dimostrare l'esistenza (o meno) di un ritmo preciso nella distribuzione di questi particolari numeri, poiché lo stesso Riemann ossevò come la frequenza dei numeri primi è strettamente legata al comportamento della funzione ζ. Ad esempio, nel 1903 Gram calcolò la posizione dei primi 15 zeri e li trovò allineati; nel 1935 Titchmarsh giunse alla determinazione dei primi 1.041: ancora tutti allineati.

Staremo quindi a vedere quali saranno gli sviluppi a tal riguardo nei prossimi anni e se un giorno si arriverà effettivamente alla prova assoluta o meno di tale ipotesi.

Bibliografia

[1] A.A.Karatsuba, S.M.Voronin, *The Riemann Zeta Function.*

[2] Aleksander Ivic, *The Riemann Zeta Function - Theory and applications.*

[3] E.C.Titchmarsh, M.A, *The zeta-function of Riemann*, Oxford Science Publications, 1951.

[4] Harold Davenport, *Multiplicative Number Theory*, Springer-Verlag, 1980.

[5] M.Chenal, *L'ipotesi di Riemann.*

[6] A.J. Harper, Lecture notes 1,2, students course on "The Riemann zeta function".

[7] K.Ford, *Zero-free regions for the Riemann zeta function.*

[8] G.Coppola, *Analytic number theory*, tesi di dottorato.

[9] Y. Cheng, *An explicit zero-free region for the Riemann zeta function.*

[10] Y Motohashi, *On Vinogradov's zero-free region for the Riemann zeta function.*

[11] Bernhard Riemann, *Uber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859.

[12] J. Bourgain, *On the Vinogradov mean value.*

[13] P. Garret, *Riemann-Hadamard product for* $\zeta(s)$.

[14] G. Iurato, *Analisi storiografica di alcuni aspetti della funzione zeta di Riemann.*

[15] D. Jekel, *The Riemann Zeta Function.*

[16] Xavier Gourdon and Pascal Sebah, *Distribution of the zeros of the Riemann Zeta function.*

[17] D.R. Heath-Brown, *Zeros of the Riemann Zeta-Function on the Critical Line.*

[18] K. Ford, *Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta function.*

[19] Godfrey H. Hardy. *Sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$.

[20] J. van de Lune e H.J.J. te Riele, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip, III.*

[21]] Samuel J. Patterson, *An introduction to the Riemann Zeta-Function*, Cambridge University Press, 1999.

[22] Godfrey H. Hardy, John E. Littlewood, *The Zeros of Riemann's Zeta Function on the Critical Line.*

[23] I.M. Vinogradov, *A new estimate for* $\zeta(1 + it)$.

[24] N.M Korobov, *Estimates of trigonometric sums and their applications.*

[25] M. Kulas, *Refinement of an estimate for the Hurwitz zeta function in a neighbourhood of the line* $\sigma = 1$.

[26] S.B. Stechkin, *The zeros of the Riemann zeta function.*

[27] K.M Bartz, *On an effective order estimate of the Riemann zeta-function.*