FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

NUMERI ALTAMENTE COMPOSTI

Relatore:
Prof. FRANCESCO PAPPALARDI

Candidato:
AUGUSTO CERICA
matricola 480705

Sessione autunnale
Anno Accademico 2016/2017
Dipartimento di Matematica 'Roma Tre'

Introduzione

I primi numeri altamente composti hanno lasciato una profonda impronta nella nostra cultura: probabilmente il motivo che spinse i Babilonesi a scegliere la base 60 per il loro sistema di numerazione fu proprio il gran numero di divisori; ne pagarono il prezzo in termini di scomodità delle moltiplicazioni, per semplificare le divisioni, che a quei tempi erano operazioni terribili. Platone pensò che la città ideale dovesse avere 5040 abitanti e vari matematici, di molti dei quali non abbiamo più traccia, contribuirono a fissare unità di misura basate su numeri altamente composti, che sono arrivate sino a noi. Oggi abbiamo gradi e ore divisi in 60 parti, l'angolo giro di 360 gradi, giorni di 24 ore, molte unità di misura non decimali suddivise in 12 unità minori (e fino al 15/2/1971 gli inglesi ebbero scellini di 12 penny e sterline di 240 penny), la stessa dozzina come unità di conteggio, perchè in questo modo le divisioni per i primi interi diventavano operazioni semplici, alla portata anche di chi non andava oltre l'aritmetica più rudimentale.

Fu Ramanujan(1887-1920) a studiarli per primo, introducendo il termine, in un saggio di 52 pagine pubblicato nel 1916. Il matematico indiano pubblicò anche un elenco dei primi 102 sino a 6746328388800 (nel quale mancava sfortunatamente 293318625600). L'elenco è stato ampliato negli anni, sino a comprendere oltre 750000 numeri.

Ramanujan dimostrò che, con l'eccezione di 4 e 36, l'esponente del massimo fattore primo di un numero altamente composto è 1 pertanto nessun altro è un quadrato o una potenza superiore. L'esponente del terzultimo primo non può superare 4. Sempre Ramanujan dimostrò che il rapporto tra due successivi interi altamente composti tende a 1.

Erdös (1913-1996) dimostrò nel 1944 che il numero di interi altamente composti minori di n cresce almeno come $\log^{1+c_1} n$, per una costante c_1 maggiore di zero, mentre nel 1988 Nicholas dimostrò che non superano $\log^{c_2} n$, per un'altra costante c_2.

Indice

Capitolo 1

Considerazioni preliminari

1.1 Numero di divisori di N e prime proprietà

Definizione 1 (***FUNZIONE DIVISORE***) *Sia* $d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *e* $m \in \mathbb{N}$
$d(n) = \sum_{m|n} 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ *(la somma è su tutti gli interi positivi m divisori di n).*
La funzione d è la ***funzione divisore****. In altre parole* $d(n)$ *denota il numero di divisori di n.*

Teorema 1 *Sia* $n \in \mathbb{N}$ *e sia* $n = p_1^{u_1} \cdot p_2^{u_2} \cdots p_r^{u_r}$ *la decomposizione canonica di n. Con* $p_1 .....p_r$ *primi distinti e* $u_1 .....u_r \in \mathbb{N}$*. Allora* $d(n) = (1+u_1) \cdots (1+u_r)$

Corollario 1 *Se p è primo e* $\alpha \in \mathbb{N}$ *allora:* $d(p^\alpha) = (\alpha + 1)$.

Osservazione 1 *Se p è primo ovviamente* $d(p) = 2$.

Osservazione 2 *Se* $n \in \mathbb{N}, n \neq 1$ *allora* $d(n) \geqslant 2$.

Osservazione 3 *Se* $n \in \mathbb{N}$ *allora* $\liminf_{n \to \infty} d(n) = 2$.

Osservazione 4 *Se* $n \in \mathbb{N}$ *allora* $d(n) < 2\sqrt{n}$.

Il numero $d(n)$ di divisori di n varia con estrema irregolarità quando n tende all'infinito.

Teorema 2 *Sia* $n \in \mathbb{N}$. *Per ogni numero reale fissato* $c > 0$ *non è vero che:*
$d(n) \ll (\log n)^c$ *per* $n \to \infty$ *cioè la disuguaglianza è violata per infiniti valori di* n.

Teorema 3 *Sia* $n \in \mathbb{N}$. *Per ogni numero reale fissato* $\epsilon > 0$ *si ha:*
$d(n) \ll_\epsilon n^\epsilon$ *per* $n \to \infty$

Teorema 4 (TEOREMA DI DIRICHLET) *Siano* $X \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Per* $X \to \infty$ *si ha:*
$\sum_{n \leqslant X} d(n) = X \log X + (2\gamma - 1)X + O(X^{\frac{1}{2}})$ *dove* γ *è la costante di Eulero ed è definita come:* $\gamma = \lim_{Y \to \infty} \left(\sum_{n \leqslant Y} \frac{1}{n} - \log Y \right) = 0.5772156649...$

Voronöi[1] e Landau[2] hanno dimostrato che il termine dell'errore è dell'ordine di $O(X^{\frac{1}{3}+\epsilon})$ o addirittura $O(X^{\frac{1}{3}} \log X)$. Anche se $O(X^{\frac{1}{4}} + \epsilon)$ sembra più probabile non è ancora stato dimostrato nulla in merito.

Ramanujan usa i numeri altamente composti per determinare l'ordine massimo di $d(n)$.

[1]Crelle's Journal, Vol. 126. p. 241.
[2]Göttinger Nachrichten, 1912.

Capitolo 2

Numeri Altamente Composti

In questo capitolo, dopo aver definito i numeri altamente composti ed elencato qualche proprietà, verranno studiate la prima forma standard ed una forma alternativa andando ad approfondire lo studio degli indici e dei fattori primi. Successivamente verranno analizzati il confronto asintotico tra due numeri altamente composti e la forma di $d(N)$ quando N è un numero altamente composto. In conclusione verranno esposti i risultati di Erdös.

2.1 Definizione e prime proprietà

Definizione 2 (*N*UMERO ALTAMENTE COMPOSTO) *Un numero naturale N è detto **numero altamente composto** se: $d(N') < d(N)$ per ogni N' naturale minore di N.*

Per esempio, 60 è altamente composto, perché ha 12 divisori e tutti i numeri inferiori ne hanno di meno. I primi sono: 1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520, 5040, 7560.

Proposizione 1 *Se N è un numero altamente composto e $d(N') > d(N)$, allora c'è almeno un numero altamente composto M tale che:*

$N < M < N'$ se N e N' sono numeri altamente composti consecutivi allora: $d(M) < d(N)$ per ogni valore di M tra N e N'.

Osservazione 5 *E' ovvio che $d(N) < d(2N)$ per ogni N.*

Corollario 2 *Se N è un numero altamente composto allora esiste almeno un numero altamente composto M tale che: $N < M \leqslant 2N$. cioè esiste almeno un numero altamente composto N tale che: $x < N \leqslant 2x$ per $x \geqslant 1$.*

Non si conosce un metodo per determinare numeri altamente composti consecutivi eccetto il tentativo esplicito.

2.2 Prima forma standard di un numero altamente composto

In questo paragrafo verrà mostrato come deve essere un numero altamente composto ad eccezione di 4 e 36.

Teorema 5 *Un numero altamente composto deve essere del tipo: $2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5} \cdot 7^{a_7} \cdots p_1^{a_{p_1}}$ con*

$$a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_5 \geqslant \cdots \geqslant a_{p_1} \geqslant 1 \tag{2.1}$$

Quindi, perché n sia un numero altamente composto:
1) i k numeri primi p_i devono essere precisamente i primi k numeri primi;
2)la sequenza degli esponenti non deve essere crescente;

Inoltre, ad eccezione dei casi $n = 4$ e $n = 36$, l'ultimo esponente deve essere uguale ad 1.

I fattoriali sono numeri altamente composti fino a 7!.

2.3 Forma alternativa di un Numero Altamente Composto

Da (2.1) e da $a_{p_1} = 1$ segue che N deve essere della forma:

$$\begin{aligned} &2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots p_1 \\ \times\ &2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots p_2 \\ \times\ &2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots p_3 \\ \times\ &\qquad \cdots \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove $p_1 > p_2 \geqslant p_3 \geqslant p_4 \geqslant \cdots$ ed il numero di righe è a_2.

2.4 Gli indici dei divisori primi nella prima forma standard

In questo paragrafo saranno studiati gli indici nella prima forma standard analizzandone, nello specifico, il confronto e le relazioni tra essi per arrivare a concludere il paragrafo con un importante teorema che dice in sostanza che, sotto determinate ipotesi, gli indici formano una successione decrescente.

Proposizione 2 *Se* $\lambda \leqslant p_1$, *allora*

$$a_\lambda \log \lambda = O(\log p_1) \qquad a_\lambda \log \lambda \neq o(\log p_1) \tag{2.3}$$

Ad esempio si ha

$$\begin{aligned} p_1 &= 3, & 1 &\leqslant a_2 \leqslant 4; \\ p_1 &= 5, & 2 &\leqslant a_2 \leqslant 4; \\ p_1 &= 7, & 2 &\leqslant a_2 \leqslant 6; \\ p_1 &= 11, & 3 &\leqslant a_2 \leqslant 6; \end{aligned}$$

Proposizione 3 *Se* $\log \lambda = o(\log p_1)$ *allora*

$$a_2 \log 2 \sim a_3 \log 3 \sim a_5 \log 5 \sim \ldots \sim a_\lambda \log \lambda$$

Proposizione 4 *Se* $\log \lambda = o(\log p_1)$, *abbiamo*

$$a_2 \log 2 \sim a_3 \log 3 \sim a_5 \log 5 \sim \cdots \sim a_\lambda \log \lambda \sim \frac{\log p_1}{\log 2} \tag{2.4}$$

Teorema 6 *Se*$\lambda^2(\log\lambda)^3 < \frac{1}{8}\log p_1$ *allora* $a_2 > a_3 > a_5 > a_7 > \cdots > a_\lambda$. *In altre parole in un numero altamente composto grande* $2^{a_2}\cdot 3^{a_3}\cdot 5^{a_5}\cdot 7^{a_7}\cdots p_1$ *gli indici relativamente vicini inizialmente formano una successione decrescente in senso stretto che vieta l'uguaglianza.*

2.5 I primi finali nella seconda forma standard

In questo paragrafo si andranno ad analizzare altre importanti relazioni tra gli indici per arrivare ad un altro risultato interessane: in un numero altamente composto sufficientemente grande gli indici relativamente vicini la fine formano una successione del tipo $\ldots 5 \ldots 4 \ldots 3 \ldots 2 \ldots 1$.

Proposizione 5 *Sia* $r = o\sqrt{(\log p_1)}$. *Allora* $a_{p_r} = 1 + a_{P_r} = r$ *e* $p_1 > p_2 > p_3 > p_4 > \cdots > p_r$. *Che detto in altri termini significa che: in un numero altamente composto grande* $2^{a_2}\cdot 3^{a_3}\cdot 5^{a_5}\cdots p_1$, *gli indici relativamente vicini la fine formano una successione*[1] *del tipo* $\ldots 5 \ldots 4 \ldots 3 \ldots 2 \ldots 1$

Teorema 7 *Se* $r = o(\log p_1)$ *allora* $\frac{\log p_r}{\log\left(1+\frac{1}{r}\right)} \sim \frac{\log p_1}{\log 2}$

Questo risultato non sarà, in generale, vero per valori maggiori di r, che sono dell'ordine di $\log p_1$

2.6 Rapporto tra due numeri altamente composti consecutivi

Teorema 8 *Il rapporto tra due numeri altamente composti consecutivi tende ad uno. Ossia numeri altamente composti abbastanza grandi successivi sono asintoticamente equivalenti.*

[1] In prossimità dell'inizio, generalmente si verificano vuoti negli indici.

2.7 Forma di $d(N)$ quando N è un Numero Altamente Composto

Andiamo ora ad analizzare come è fatto $d(N)$ quando N è un numero altamente composto. Da (2.2) vediamo che

$$d(N) = 2^{\pi(p_1)-\pi(p_2)} \cdot 3^{\pi(p_2)-\pi(p_3)} \cdot 4^{\pi(p_3)-\pi(p_4)} \cdots (1+a_2) \tag{2.5}$$

da cui segue che

$$d(N) = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5} \cdots \bar{\omega}^{a_{\bar{\omega}}} \tag{2.6}$$

dove $\bar{\omega}$ è il più grande primo non superiore a $1+a_2$, e $a_\lambda = \pi(p_{\lambda-1})+O(p_\lambda)$.

2.8 Crescita asintotica e densità

Teorema 9 *Se indichiamo con $Q(x)$ il numero dei numeri altamente composti minori o uguali a x allora esistono due costanti a e b entrambe maggiori di 1, tali che:* $\ln(x)^a \leqslant Q(x) \leqslant \ln(x)^b$

La prima parte della disequazione venne dimostrata da Erdös nel 1944 e la seconda da Nicolas nel 1988.

2.9 I risultati di Erdös

Erdös[2] dimostra che il numero di numeri altamente composti non superiori di x è più grande di

$$(\log x)^{1+c}$$

per qualche c.

Andiamo ora ad analizzare tre lemmi, presenti sostanzialmente nel lavoro di

[2] Erdös P. (1944). On highly composite numbers. Journal of the London Mathematical Society. Second Series 19: 130-133.

Ramanujan.
Sia
$$n = 2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \dots p^{k_p}$$
un numero altamente composto sufficientemente grande. Ovviamente
$$k_2 \geqslant k_3 \geqslant \cdots \geqslant k_p,$$
altrimenti, riordinando gli esponenti,potremmo ottenere un più piccolo valore per la stessa $d(n)$.

Lemma 1 $c_1 \log n < p < c_2 \log n$

Lemma 2 *Se q è un primo tale che* $\frac{1}{2}p < q \leqslant p$, *allora* $k_q = 1$.

Lemma 3 *Se q è un primo tale che* $2\sqrt{p} < q < 4\sqrt{p}$ *allora* $k_q = 2$.

Teorema 10 *Esiste una costante positiva c tale che, se n è un numero altamente composto, allora esiste anche un altro numero altamente composto n_1 tale che:*
$$n < n_1 < n + n(\log n)^{-c}$$

Da quest'ultimo teorema segue immediatamente che il numero di numeri altamente composti non superiori a x è più grande di $(\log x)^{1+c}$. Erdös afferma di non essere in grado di sapere se il numero di numeri altamente composti sia più grande di $(\log x)^k$ per ogni k.

2.10 L'ordine del numero di Numeri Altamente Composti minori di N

Possiamo trovare l'ordine del numero di numeri altamente composti superiori non superiori ad un dato numero N. Sia N' il più piccolo numero altamente composto superiore maggiore di N, e sia $N' = e^{\vartheta(2^x)+\vartheta(\frac{3}{2})^x+\vartheta(\frac{3}{4})^x+\cdots}$ Allora, dal paragrafo (3.5) sappiamo che $2N \leqslant N' \leqslant 2^x N$ e così $N' = O(N \log N)$;

ed anche che il numero di numeri altamente composti superiori non superiori a N' è $n = \pi(2^x) + \pi\left(\frac{3}{2}\right)^x + \pi\left(\frac{4}{3}\right)^x + \cdots$. Si vede facilmente, sempre del paragrafo (3.5) che, se il più grande numero altamente composto superiore che non supera N è $2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5} \cdots p^{a_p}$, allora il numero di numeri altamente composti superiori che non superano N è la somma di tutti gli indici, cioè

$$a_2 + a_3 + a_5 + \cdots + a_p$$

Capitolo 3

Numeri Altamente Composti Superiori

In questo capitolo, dopo aver definito i numeri altamente composti superiori ed elencato qualche proprietà, verrà analizzata la forma esatta di un numero altamente composto superiore. Come per i numeri altamente composti, anche ora verrà affrontato lo studio del numero di divisori di un numero altamente composto superiore. In conclusione si andrà a vedere che relazione c'è tra numeri altamente composti superiori consecutivi ed a studiare il numero di numeri altamente composti superiori maggiori di un dato numero.

3.1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 3 *Un numero N è detto numero altamente composto superiore se esiste un numero positivo ϵ tale che:*

$$\frac{d(N)}{N^{\epsilon}} \geqslant \frac{d(N')}{N'^{\epsilon}} \tag{3.1}$$

per ogni valore di N' minore di N e

$$\frac{d(N)}{N^{\epsilon}} > \frac{d(N')}{N'^{\epsilon}} \tag{3.2}$$

per ogni valore di N' maggiore di N.

Ogni numero altamente composto superiore è anche altamente composto. Quindi, se $N' < N$ segue da (3.1) che $d(n) \geqslant d(N')\left(\frac{N}{N'}\right)^{\epsilon} > d(N')$ e così N è altamente composto.

3.2 Forma esatta di un Numero Altamente Composto Superiore

Consideriamo ora come deve essere N per essere un numero altamente composto superiore.

Teorema 11 *N è della forma*

$$2^{[2^{(\frac{1}{x}-1)^{-1}}]} \cdot 3^{[3^{(\frac{1}{x}-1)^{-1}}]} \cdot 5^{[5^{(\frac{1}{x}-1)^{-1}}]} \cdots p_1, \tag{3.3}$$

dove p_1 è il più grande primo che non supera 2^x.

3.3 Numero di divisori di un Numero Altamente Composto Superiore

In questo paragrafo si andrà a studiare il numero di divisori di un numero altamente composto superiore, in particolare si andrà a vedere come è fatto $d(N)$.
N è della forma

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p_1 \\ \times\ & 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p_2 \\ \times\ & 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p_3 \\ \times\ & \qquad \cdots \end{aligned} \tag{3.4}$$

dove p_1 è il più grande primo non superiore di 2^x, p_2 è il più grande primo non superiore di $\left(\frac{3}{2}\right)^x$, e così via.
In altre parole N è della forma

$$e^{\vartheta(2^x)+\vartheta(\frac{3}{2})^x+\vartheta(\frac{3}{4})^x+\cdots} \tag{3.5}$$

e $d(N)$ è della forma

$$2^{\pi(2^x)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\pi\left(\frac{3}{2}\right)^x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\pi\left(\frac{4}{3}\right)^x} \cdots \tag{3.6}$$

dove $\pi(x)$ denota il numero di primi non superiori a x e $\vartheta(x) = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \cdots + \log p$. dove p è il più grande primo non maggiore di x. Allora ad ogni valore di x non minori di 1 corrisponde uno ed un solo valore di N.

3.4 Numeri Altamente Composti Superiori consecutivi

M e N sono numeri altamente composti superiori consecutivi se non ci sono numeri altamente composti superiori tra M e N. Da (3.4) e (3.5) è facile vedere che, se M e N sono due qualunque numeri altamente composti superiori e $M > N$, allora M è multiplo di N. Inoltre, se M e N sono numeri altamente composti superiori consecutivi, con ad esempio $M > N$, allora $\frac{M}{N}$ è un numero primo.

3.5 Numero di Numeri Altamente Composti Superiori minori di un dato numero

Dal risultato del paragrafo (3.4) notiamo che il numero di numeri altamente composti superiori non superiori a $e^{\vartheta(2^x)+\vartheta(\frac{3}{2})^x+\vartheta(\frac{3}{4})^x+\cdots}$ è $\pi(2^x) + \pi(\frac{3}{2})^x + \pi(\frac{4}{3})^x + \cdots$

In altre parole se $x_n \leqslant x < x_{n+1}$ allora

$$n = \pi(2^x) + \pi\left(\frac{3}{2}\right)^x + \pi\left(\frac{4}{3}\right)^x + \cdots \tag{3.7}$$

Capitolo 4

Relazioni tra Numeri Altamente Composti e Numeri Altamente Composti Superiori

In questo capitolo si andranno ad analizzare le relazioni tra numeri altamente composti e numeri altamente composti superiori.

Proposizione 6

$$d(N) \leqslant N^{\frac{1}{x}} \frac{2^{\pi(2^x)}}{e^{\frac{1}{x}\vartheta(2^x)}} \frac{(\frac{3}{2})^{\pi((\frac{3}{2})^x)}}{e^{\frac{1}{x}\vartheta((\frac{3}{2})^x)}} \frac{(\frac{4}{3})^{\pi((\frac{4}{3})^x)}}{e^{\frac{1}{x}\vartheta((\frac{4}{3})^x)}}$$

Osservazione 6 *In vale l'uguaglianza quando*

$$N = e^{\vartheta(2^x)+\vartheta(\frac{3}{2})^x+\vartheta(\frac{4}{3})^x}$$

Ad esempio consideriamo:

$$x = 2, 3, 4$$

ed otteniamo:

$$\begin{aligned} d(N) &\leqslant \sqrt{3N}, \\ d(N) &\leqslant 8(3N/35)^{\frac{1}{3}} \\ d(N) &\leqslant 96(3N/50050)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

per ogni valore di N e $d(N) = \sqrt{3N}$ dove $N = 2^2 \cdot 3$; $d(N) = 8(3N/35)^{\frac{1}{3}}$ dove $N = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $d(N) = 96(3N/50050)^{\frac{1}{4}}$ dove $N = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

4.1 Numeri Altamente Composti tra consecutivi Numeri Altamente Composti Superiori

Proposizione 7

Siano S e S' due qualunque numeri altamente composti superiori, e sia

$$S = e^{\vartheta(2^x)+\vartheta(\frac{3}{2})^x+\vartheta(\frac{4}{3})^x+\cdots}.$$

Se N è un numero altamente composto e $S' < N < S$ in modo che $d(S') < d(N) < d(S)$, allora

$$\frac{1}{2}d(S) < d(N) < d(S'), \qquad d(S') < d(N) < 2d(S')$$

Bibliografia

[1] Srinivasa Ramanujan, (1915) *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) 14: 347-409.

[2] Erdös P. (1944). On highly composite numbers. Journal of the London Mathematical Society. Second Series 19: 130-133.

[3] Alaoglu, L.; Erdös, P. (1944). On highly composite and similar numbers. Transactions of the American Mathematical Society 56 (3): 448 - 469.

[4] Ramanujan, Srinivasa (1997). Highly composite numbers. Ramanujan Journal 1 (2): 119-153. Annotated and with a foreword by Jean-Louis Nicolas and Guy Robin.

[5] W W L Chen, 1981, 2013, Lecture notes of William Chen, Elementary Number Theory.

[6] Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Highly composite number.