

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"  
IN410 - MODELLI DI CALCOLO  
A.A. 2017-2018  
PROF. M. PEDICINI

APPELLO B-2017 DEL 8/02/2018 – TEMPO 3H00

COGNOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ MATRICOLA \_\_\_\_\_

**Esercizio 1.** (1) Dimostrare che la funzione  $\log_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definita come

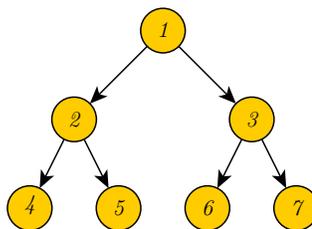
$$\log_2(x) = \begin{cases} y & \text{se } x = 2^y, \\ \perp & \text{negli altri casi,} \end{cases}$$

che computa il logaritmo con base 2 ristretto ai naturali è una funzione ricorsiva.

- (2) Dimostrare che la funzione  $\text{mod} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  che computa  $\text{mod}(n, p)$ , la classe resto di  $n$  modulo  $p$ , è una funzione ricorsiva.
- (3) Dimostrare che la funzione  $\text{prime} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  che computa  $\text{prime}(n) = p$  l' $n$ -esimo numero primo è una funzione ricorsiva (ad esempio utilizzando il punto precedente).

**Esercizio 2.** Definire una rappresentazione nel lambda calcolo per gli alberi binari etichettati [suggerimento: utilizzare l'idea di rappresentazione per le liste pensando ad un passo di iterazione con due possibili modi di proseguire e un termine che rappresenta l'etichetta].

- (1) definire i termini *root*, (risp. *right* e *left*) che estraggono da un lambda termine che rappresenta un albero binario etichettato, l'etichetta della radice (risp. il sottoalbero destro e il sottoalbero sinistro) [suggerimento: modificare il termine per il calcolo di head/tail di liste].
- (2) fornire a titolo di esempio il termine che rappresenta l'albero binario etichettato con interi con 7 nodi numerati da 1 (il nodo radice) a 7 per livelli:



- (3) definire un termine che rappresenta la funzione che calcola l'altezza di un albero binario etichettato;
- (4) definire un termine che effettua la visita in profondità dell'albero, ovvero rappresenta la funzione  $\text{DFS}_{G,F}$

$$\begin{cases} \text{DFS}_{G,F}(\text{emptytree}) = G \\ \text{DFS}_{G,F}(\text{tree}) = F(\text{root}(\text{tree}), \text{DFS}_{G,F}(\text{left}(\text{tree})), \text{DFS}_{G,F}(\text{right}(\text{tree}))) \end{cases}$$

con  $F$  e  $G$  funzioni rappresentabili nel lambda calcolo.

- (5) definire due lambda termini  $G$  ed  $F$  in modo tale che se  $t$  è la rappresentazione di un albero binario etichettato con interi, sia  $\text{DFS}_{G,F}(t)$  la somma di tutte le etichette.

**Esercizio 3.** Si consideri il seguente insieme  $X = X_1 \cup X_2$  dove

$$X_1 = \{ab^j c^j | j \geq 0\}$$

ed

$$X_2 = \{a^i b^j c^k | i, j, k \geq 0 \text{ e } i \neq 0\}.$$

- (1) Mostrare che  $X$  soddisfa le ipotesi del pumping lemma;
- (2) Mostrare che in generale l'intersezione di insiemi regolari è regolare (costruire l'automa per l'intersezione);
- (3) Considerare  $Y = ab^*c^*$ , mostrare che è regolare (ovvio);
- (4) Dedurre che se  $X$  fosse regolare lo sarebbe anche  $X \cap Y$ ;
- (5) Calcolare  $X \cap Y$  come insieme e mostrare che non soddisfa le condizioni del pumping lemma;
- (6) Dedurre che  $X$  non è regolare.