UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
IN410 - CALCOLABILITÀ E COMPLESSITÀ
A.A. 2018-2019
PROF. M. PEDICINI

7/01/2019 PROVA IN ITINERE – DURATA 3H00

COGNOME ____________________ NOME ____________________ MATRICOLA ________________

Esercizio 1. *Sia t il λ-termine*

$$t = \lambda x((\underline{2})(\lambda y\,((y)x)x)\underline{1})x$$

dove gli interi sottolineati indicano i termini numerali di Church:

$$\underline{n} = \lambda f \lambda x \underbrace{(f)\dots(f)}_{n-volte} x$$

(1) *Mostrare che*

$$(t)I \simeq_\beta I$$

dove $I = \lambda xx$.

(2) *rappresentare $(t)I$ come grafo di condivisione;*

(3) *ridurre il grafo alla forma normale;*

(4) *mostrare la procedura di rilettura del λ-termine a partire dal grafo ottenuto.*

Esercizio 2. (1) *Data una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ricordare cosa si intende che f è costruibile in tempo.*

(2) *Mostrare che se f è costruibile in tempo allora anche la funzione $g(x) = f(x)/2$ è costruibile in tempo.*

Esercizio 3. *Si consideri la rappresentazione*[1] *di sequenze di bit (di lunghezza qualunque) nel λ-calcolo nel modo seguente:*

$$\begin{aligned}
[] &= \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda z z \\
[b] &= \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda z (z) x_b \\
[b_1 b_2] &= \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda z ((z) x_{b_1}) x_{b_2} \\
&\vdots \\
[b_1 \dots b_n] &= \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda z (\dots ((z) x_{b_1}) x_{b_2} \dots) x_{b_n}
\end{aligned}$$

così ad esempio la sequenza

$$[01101] = \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda z (((((z) x_0) x_1) x_1) x_0) x_1$$

[1]in questo esercizio, per rappresentazione NON intendiamo rappresentazione forte

(1) *Definire una rappresentazione nel* λ*-calcolo per la funzione complemento* C *(che complementa una sequenza: ad esempio* $(C)[01101] \to_\beta [10010]$*);*

(2) *Definire una rappresentazione nel* λ*-calcolo per l'operazione* J *di concatenazione di due sequenze, ad esempio* $((J)[01101])[1010] \to_\beta [011011010]$*;*

(3) *Definire una rappresentazione nel* λ*-calcolo per le operazioni* A_b *con* $b \in \{0,1\}$ *che aggiungono* b *alla sequenza, ad esempio* $(A_0)[01101] \to_\beta [011010]$ *e* $(A_1)[01101] \to_\beta [011011]$*);*

(4) *Definire un* λ*-termine* M *per il quale*

$$(\langle M, u\rangle)\langle M, v\rangle \to_\beta \langle M, (v)u\rangle$$

(5) *Con l'ausilio del termine* M *trovato al punto precedente definire un termine* L *che calcola la lunghezza di una sequenza.*

(6) *Con l'ausilio del termine* M *trovato al punto (4) definire un termine* E *che trasforma una sequenza binaria nella lista invertita dei corrispondenti booleani, ad esempio*

$$(E)[01101] \to_\beta \lambda f \lambda k((f)\mathsf{true})((f)\mathsf{false})((f)\mathsf{true})((f)\mathsf{true})((f)\mathsf{false})k,$$

dove $\mathsf{true} = \lambda x \lambda y\, x$ *e* $\mathsf{false} = \lambda x \lambda y\, y$ *e la rappresentazione delle liste è quella analoga ai numerali di Church:*

$$(t_1, \ldots, t_n) = \lambda f \lambda k((f)t_1)\ldots((f)t_n)k.$$

(7) *(facoltativo) Dare il termine* E_2 *che associa ad una sequenza binaria, la lista dei booleani corrispondenti, presi nello stesso ordine.*