UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
IN410 - CALCOLABILITÀ E COMPLESSITÀ
A.A. 2020-2021

PROF. M. PEDICINI

ESONERO DEL 9/11/2020 – DA SVOLGERE OFFLINE PREVIA ISCRIZIONE ALL'ESONERO E RICONSEGNARE IN FORMATO PDF ENTRO VENERDÌ 13/11 ALLE ORE 23H59 – L'ESONERO SARÀ VALIDATO TRAMITE UNA DISCUSSIONE ORALE, CHE POTRÀ ANCHE SVOLGERSI DURANTE QUESTA SETTIMANA SE IL COMPITO VENISSE CONSEGNATO PRIMA DELLA SCADENZA – ENTRO OGGI ALLE ORE 13H00 COMUNICARE AL DOCENTE TRAMITE E-MAIL (`MARCO.PEDICINI@UNIROMA3.IT`) L'ISCRIZIONE ALL'ESONERO.

COGNOME ______________________ NOME ______________________ MATRICOLA ________________

Esercizio 1. *Introduciamo un nuovo modello di calcolo: l'automa a pila.*

Un PDFA (push-down finite automata) È una variante dell'automa a stati finiti, ed è definito nel modo seguente:

DEFINIZIONE: *Un PDFA di alfabeto A, alfabeto della pila B e insieme degli stati Q è definito come una quadrupla (T, q_0, Z_0, F) dove*

$$T : Q \times A \cup \{\epsilon\} \times B \to Q \times B^*,$$

dove ϵ rappresenta la parola vuota, $F \subset Q$ è l'insieme degli stati accettanti, $q_0 \in Q$ è uno stato particolare detto stato iniziale, $Z_0 \in B$ è il carattere con cui è inizializzata la pila.

DESCRIZIONE DELLA COMPUTAZIONE ASSOCIATA: *La pila contiene ad ogni passo di computazione una parola $w \in B^*$ la funzione di transizione agisce analogamente al caso degli automi finiti in base al carattere letto nella parola di input (eventualmente ϵ), allo stato corrente e inoltre in funzione dell'ultimo carattere della pila. La transizione è determinata dal valore $T(q, a, b) = (q', w')$ consiste nell'aggiornamento dello stato corrente che da q diventa q' (come nel caso dell'automa finito), il puntatore alla posizione corrente viene avanzato se $a \neq \epsilon$ mentre resta fermo se $a = \epsilon$ (come negli automi non-deterministici con mosse ϵ) e l'ultimo carattere della pila viene sostituito con la parola w' (quindi se la pila è wb si ha ww').*

È necessario richiedere che in corrispondenza del carattere letto ϵ non sia possibile applicare nessuna transizione con carattere diverso da ϵ (altrimenti si perderebbe il determinismo).

L'automa a pila termina la computazione quando ha letto l'ultimo carattere della parola di ingresso, ha effettuato la transizione associata e non può effettuare transizioni con carattere letto ϵ. La configurazione finale è data da q e dalla pila w, analogamente al caso degli automi finiti, la parola di input è accettata se $q \in F$ e viene refutata se $q \notin F$.

a) Definire l'algoritmo formale associato ad un automa a pila (e quindi il concetto di decidibilità per PDFA).

b) Valutare il numero di configurazioni possibili per un PDFA in funzione della lunghezza della parola di input.

c) Dimostrare che ogni X decidibile per automa finito è anche PDFA decidibile.

d) Dimostrare che l'insieme $X = \{0^p 1^p | p \in \mathbb{N}\}$ è PDFA-decidibile.

e) Dimostrare che se X è decidibile per PDFA allora è decidibile per macchina di Turing.

f) Fornire una maggiorazione per la complessità (rispetto alla macchina di Turing) degli insiemi PDFA-decidibili.

Esercizio 2. *(facoltativo) Con le notazioni dell'esercizio 1, si consideri la seguente variante PDFA' di automa a pila, che ridefinisce il solo concetto di parola accettata dall'automa nel modo seguente:*
l'automa a pila termina la computazione quando ha letto l'ultimo carattere della parola di ingresso ed ha effettuato la transizione associata e non può effettuare transizioni con carattere letto ϵ, terminando con uno stato q e con la pila w: in questo caso la parola di input è accettata se $q \in F$ e w è la parola vuota e viene refutata se $q \notin F$ oppure se w non è vuota.

Provare che X è PDFA decidibile se e solo se X è PDFA' decidibile.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente funzione $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$:*

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n < 3, \\ 3T(n/3) + bn & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

a) Stabilire se $T(n)$ è una funzione di complessità (definitivamente monotona non-decrescente e maggiore uguale di n);
b) Mostrare che $DTIME(T(n)) = DTIME(n \log(n))$.

Esercizio 4. *Fornire l'implementazione in Wolfram Mathematica per l'utilizzo con la libreria TMlib fornita a lezione di una delle seguenti funzioni o macchine di Turing (scelta a piacere):*

a) di una funzione che preso un automa non deterministico restituisce l'automa deterministico che decide lo stesso insieme;
b) di una funzione che presa una macchina di Turing (mononastro) restituisce la macchina a seminastro che la simula;
c) di una funzione che presa una macchina multinastro restituisce la macchina (mononastro) che la simula;
d) di una funzione che presa una generica macchina (mononastro) μ restituisce la macchina (può essere multinastro) che semidecide l'insieme X delle parole w tali che la macchina μ si arresta sull'input ww.