

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI “ROMA TRE”
IN410 - CALCOLABILITÀ E COMPLESSITÀ
A.A. 2023-2024
PROF. M. PEDICINI

12/01/2024 PROVA IN ITINERE – DURATA 3H00

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA _____

Esercizio 1. (1) Spiegare perché una funzione strettamente sublineare (ovvero tale che $f(n) < n$ per ogni n) non può essere costruibile in tempo;

(2) Costruire esplicitamente un f -timer per la funzione

$$f(n) := 2n - 2;$$

(3) Dimostrare che ogni funzione $g_{(a,b)}(n) := an - b$ è costruibile in tempo per ogni coppia di interi $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tale che $a \geq b$.

Esercizio 2. (1) Sia $f(n)$ la successione di Fibonacci (ovvero definita come $f(0) := 0$, $f(1) := 1$, $f(n+1) := f(n) + f(n-1)$). Mostrare che l'insieme

$$X := \{x \mid x = f(n) \cdot f(n+1) \text{ per qualche } n\}$$

è un insieme ricorsivo.

(2) Fornire l'espressione ricorsiva di $\mathbf{1}_X$ e delle eventuali funzioni ausiliarie utilizzate.

Esercizio 3. Sia $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la seguente funzione

$$h(x) := \begin{cases} f(x)^2 + 1 & \text{se } x \text{ è pari} \\ \lfloor x/2 \rfloor & \text{se } x \text{ è dispari.} \end{cases}$$

con $f(x)$ l' x -esimo numero della successione di Fibonacci (come all'esercizio precedente).

(1) Fornire un lambda termine H che rappresenta la funzione h .

(2) Definita g nel modo seguente:

$$g(x) := \begin{cases} k & \text{se } k \text{ è il primo valore per cui } h^k(x) = 2 \\ \perp & \text{se } h^k(x) \neq 2 \text{ per ogni } k \end{cases}$$

dove $h^k(x)$ è x se $k = 0$ ed è $h(h^{k-1}(x))$ se $k > 0$.

Fornire un lambda termine G che rappresenta la funzione g .
(suggerimento scrivere il lambda termine che rappresenta l'iterazione di h fino a quando il risultato non è 2, e risolvere l'equazione ricorsiva utilizzando il teorema di punto fisso).