

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN3 - TEORIA DELL'INFORMAZIONE - A.A. 2007-2008
M. PEDICINI

ESONERO DEL 11/01/2008 - TEMPO 3H00

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA _____

Esercizio 1. Considerare la concatenazione di n BSC (binary symmetric channel) ognuno con probabilità di scambio $f = p$.

a) Se l'output di ogni singolo canale è direttamente connesso all'input del canale seguente mostrare che il canale risultante dalla composizione è equivalente ad un canale BSC con probabilità di scambio

$$f = \frac{1}{2}(1 - (1 - 2p)^n).$$

(suggerimento: usare l'induzione sul numero di canali concatenati)

b) Mostrare che la capacità del BSC ottenuto per concatenazione di n BSC tende a zero quando n cresce. (ovvero: calcolare il limite della mutua informazione tra l'input e l'output all'aumentare di n).

Esercizio 2. Siano

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

e

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$$

rispettivamente gli alfabeti di input ed output del canale W somma senza memoria di tre sotto-canali W_i di alfabeto di input X_i ed alfabeto di output Y_i (qui il termine somma sta ad indicare che non c'è sovrapposizione di simboli tra gli alfabeti dei tre sotto-canali $X_i \cap X_j = \emptyset$ e $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ se $i \neq j$).

- (1) Nel caso di canali binari simmetrici $|X_i| = |Y_i| = 2$, con probabilità di scambio pari a $f = 1/2$, disegnare il diagramma corrispondente al canale W e determinare la sua matrice delle probabilità di transizione.
- (2) Determinare la capacità del canale descritto al punto precedente.
- (3) Nel caso generale, porre la variabile aleatoria discreta

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X_1, \\ 2 & \text{se } x \in X_2, \\ 3 & \text{se } x \in X_3, \end{cases}$$

e mostrare che $H(Y) = H(Y, Z)$ e $H(Y|X) = H(Y|X, Z)$.

- (4) Utilizzare il punto precedente per esprimere $I(X; Y)$ in funzione di $I(X; Y|Z)$ e $H(Z)$.
- (5) Utilizzando i punti precedenti, mostrare che la capacità C del canale somma W soddisfa l'equazione

(1)
$$2^C = 2^{C_1} + 2^{C_2} + 2^{C_3}$$

dove C_i è la capacità dei singoli canali W_i .