UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN3 - TEORIA DELL'INFORMAZIONE – A.A. 2008-2009
M. PEDICINI

ESONERO DEL 16/06/2009 – TEMPO 2H00
APPELLO A DEL 16/06/2009 – TEMPO 3H00

COGNOME ________________________ NOME ________________________ MATRICOLA __________________

ATTENZIONE: PER L'ESAME RISPONDERE A DUE QUESITI A SCELTA IN OGNUNA DELLE DUE PARTI; PER L'ESONERO RISPONDERE AI TRE QUESITI DELLA SECONDA PARTE.

PRIMA PARTE

Esercizio 1. *Comprimere la seguente sequenza binaria utilizzando l'algoritmo di Lempel-Ziv:*

$$100110001100101000001011011101101100100111010101111$$
$$11010110010000010100110000001111111011111001001001101.$$

Esercizio 2. *Calcolare la distribuzione congiunta $p(X, Y)$ che ha le seguenti distribuzioni marginali*

$$p(X) = \{2/3, 1/3\}$$

e

$$p(Y) = \{1/4, 3/4\}$$

e massimizza $H(X, Y)$.

Esercizio 3. *Determinare il codice duale del codice di Hamming $H(7, 4)$.*

SECONDA PARTE

Esercizio 4. *Sia $BEC(f)$ un canale binario con cancellazione (dove f è la probabilitá di cancellazione).*

(1) *Scrivere la matrice delle probabilità di transizione Q associata a $BEC(f)$;*
(2) *Calcolare la capacità del canale;*
(3) *Concatenare due canali e calcolare la capacità del canale composto $BEC^2(f)$;*
(4) *Calcolare la capacità $BEC^n(f)$ ottenuto concatenando un n-volte il canale;*
(5) *Calcolare il limite della capacità di $BEC^n(f)$ per $n \to \infty$.*

Esercizio 5. *Sia $\rho(X, Y) := H(X|Y) + H(Y|X)$ dimostrare che ρ soddisfa le seguenti proprietà:*

a) *definita positiva: $\rho(x, y) \geq 0$;*
b) *simmetrica: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;*
c) *soddisfa la disuguaglianza triangolare: $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.*

Inoltre, posto $X = Y$ se esiste una bijezione tra i due insiemi allora dimostrare che vale anche la proprietà:

d) *riflessiva: $\rho(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$; ovvero $\rho(X, Y)$ è una metrica.*

Dimostrare infine che

e) $\rho(X, Y) = 2H(X, Y) - H(X) - H(Y)$.

Esercizio 6. *Sia C_1 un codice lineare (n_1, k_1, d_1) su F, e sia C_2 un codice lineare (n_2, k_2, d_2) su F. Si consideri il codice*

$$C = \{(y, x + y) | x \in C_1, y \in C_2\}.$$

(la notazione (n_i, k_i, d_i) indica la lunghezza n_i delle parole codice, k_i la lunghezza in bit del segnale, la distanza minima d_i tra due parole codice).

Dimostrare che se C_1 ha matrice generatrice G_1 e C_2 ha matrice generatrice G_2 allora C ha matrice generatrice

$$G = \begin{pmatrix} 0 & G_1 \\ G_2 & G_2 \end{pmatrix}$$

(per chiarezza, la convenzione adottata è che il prodotto $v \cdot G$ fornisce la codifica di v).