

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN3 - TEORIA DELL'INFORMAZIONE – A.A. 2009-2010
M. PEDICINI

APPELLO A DEL 01/07/2010 – TEMPO 2H30

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA _____

Esercizio 1. Si considerino due canali definiti dalle seguenti matrici:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Si calcoli la capacità del canale ottenuto concatenando i due canali.

Esercizio 2. Decodificare la seguente sequenza di alfabeto $A = \{0, 1, 2\}$ codificata utilizzando l'algoritmo Lepel-Ziv (adattato all'alfabeto ternario):

001102001101120201212211.

Esercizio 3. La probabilità congiunta per le variabili casuali X ed Y è data dalla seguente tabella:

$P(X; Y)$	0	1
0	1/8	1/4
1	1/8	1/2

Calcolare:

- (a) $H(X)$ e $H(Y)$;
- (b) $H(X|Y)$ e $H(Y|X)$;
- (c) $H(X, Y)$ e $I(X; Y)$;
- (d) $D_{KL}(p(x)||p(y))$ e $D_{KL}(p(y)||p(x))$.

Esercizio 4. Considerare la variabile aleatoria X a valori in $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, e il codice binario

X	$P(X)$	Y
x_1	0.5	1
x_2	0.15	000
x_3	0.1	001
x_4	0.1	0100
x_5	0.1	0110
x_6	0.05	0111

- (a) Mostrare che il codice è prefix-free disegnandone una rappresentazione ad albero;
- (b) derivare l'entropia della sorgente $H(X)$ e la lunghezza media del codice;
- (c) determinare se il codice è ottimale. Se non lo è costruire un codice ottimale per X e calcolarne la lunghezza media delle parole codice.