

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN420 - TEORIA DELL'INFORMAZIONE – A.A. 2015-2016
M. PEDICINI

ESONERO DEL 5/11/2015 – TEMPO 2H00

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA _____

Esercizio 1. Due variabili aleatorie X ed Y prendono valori in $\mathcal{A}_X = \{0, 1\}$ e $\mathcal{A}_Y = \{0, 1, 2\}$.
La loro distribuzione congiunta è descritta dalla seguente funzione del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$p(x, y) = k \cdot (x + y)$$

- a) Determinare k in modo che $p(x, y)$ sia una distribuzione di probabilità;
- b) Derivare la tabella della distribuzione $p(x, y)$ e delle distribuzioni marginali $p(x)$ e $p(y)$;
- c) Calcolare $H(X)$ e $H(Y)$;
- d) Calcolare $I(X; Y)$.

Esercizio 2. Una sorgente di informazione (senza memoria) produce simboli nell'alfabeto $\mathcal{A}_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	1/12	1/12	1/6	1/6	1/2

- a) Si fornisca un codice binario ottimale per la codifica della sorgente. Qual è la lunghezza media delle parole codice? Si confronti con l'entropia della sorgente.
- b) Quanti possibili codici Huffman ci sono per questa distribuzione?

Esercizio 3. Si considerino i tre codici simbolici:

x_0	11	x_0	01	x_0	01
x_1	10	x_1	10	x_1	10
x_2	01	x_2	110	x_2	001
x_3	001	x_3	111	x_3	100
x_4	0001	x_4	0000	x_4	000
x_5	0000	x_5	0001	x_5	111

- a) Quale di questi codici è univocamente decodificabile? Perché? (motivare la risposta)
- b) Per ognuno dei codici UD determinati al punto precedente, dire se è possibile trovare un codice UD con una lunghezza attesa di codifica inferiore. Se la risposta è no, si motivi la risposta. Se la risposta è affermativa si trovi una codifica migliore.

Esercizio 4. Siano $X_1, X_2, X_3 \dots$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite a valori nell'insieme $\mathcal{A}_X = \{a, b, c, d, e, f\}$, con la seguente distribuzione:

$$p(a) = 1/2, p(b) = 1/4, p(c) = 1/8, p(d) = 1/16, p(e) = 1/32, p(f) = 1/32$$

- a) Si calcoli $H(X_1)$;
- b) Qual è la sequenza più probabile di una data lunghezza n ? Quanto vale la sua probabilità?

c) In relazione alla definizione di insieme di tipicità

$$T_{\beta}^n = \left\{ x^n \in \mathcal{A}_X^n : \left| -\frac{1}{n} \log p(x^n) - H(X) \right| < \beta \right\}$$

dire se la sequenza trovata al punto precedente appartiene all'insieme $T_{0.1}^n$. Cosa si può dire a proposito di T_1^n ?

Esercizio 5. Siano X e Y variabili aleatorie discrete con e sia $p(x_i) = p_i$ e $p(y_i) = q_i$ le rispettive distribuzioni. La sorgente di informazione $X \times Y$ emette coppie di simboli (x_i, y_j) con probabilità $p(x_i, y_j) = p_i q_j$.

(1) Mostrare che

$$H(X \times Y) = H(X) + H(Y).$$

(2) Determinare il valore di $D_{KL}(X||Y)$.