UNIVERSIT DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN420 - TEORIA DELL'INFORMAZIONE – A.A. 2015-2016
M. PEDICINI

ESAME DEL 18/02/2016 – TEMPO 3H00

COGNOME ______________________ NOME ______________________ MATRICOLA ________________

Esercizio 1. *Siano X e Y due variabili aleatorie discrete di stesso alfabeto $\mathcal{A}_X = \mathcal{A}_Y = \{0,1,2,3\}$ rappresentanti l'input e l'output di un canale discreto senza memoria descritto dalla seguente matrice delle probabilità transizione:*

$$W = \begin{pmatrix} 1-\epsilon & \epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & 1-\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta & \delta \\ 0 & 0 & \delta & 1-\delta \end{pmatrix}.$$

Un tale canale viene detto "canale somma" perchè può essere pensato come la somma di due canali paralleli

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{pmatrix} \qquad W_2 = \begin{pmatrix} 1-\delta & \delta \\ \delta & 1-\delta \end{pmatrix}$$

che lavorano sulle due metà dell'alfabeto: $\mathcal{A}_{X_1} = \mathcal{A}_{Y_1} = \{0,1\}$ e $\mathcal{A}_{X_2} = \mathcal{A}_{Y_2} = \{2,3\}$.

Rispondere ai seguenti quesiti al fine di calcolare la capacità del canale:

(1) *rappresentare graficamente il canale W;*
(2) *fissare $\epsilon = \delta = \frac{1}{2}$ e calcolare la capacità del canale;*
(3) *sia p_X la distribuzione su X e poniamo $p_X(0) + p_X(1) = \alpha$ e $p_X(2) + p_X(3) = 1-\alpha$, mostrare che la mutua informazione tra l'input X e l'output Y del canale W si può scrivere come:*
$$I(X;Y) = H_2(\alpha) + \alpha I(X;Y|X \in \mathcal{A}_{X_1}) + (1-\alpha) I(X;Y|X \in \mathcal{A}_{X_2});$$
(4) *al fine di calcolare la capacità del canale W bisognerà massimizzare il valore calcolato al punto precedente su tutte le possibili distribuzioni su X. Discutere se è possibile massimizzare in due passi distinti scegliendo prima $p_1(x|X \in \mathcal{A}_{X_1})$ e $p_2(x|X \in \mathcal{A}_{X_2})$ al fine di massimizzare $I(X;Y|X \in \mathcal{A}_{X_1})$ e $I(X;Y|X \in \mathcal{A}_{X_2})$, rispettivamente; e successivamente scegliere α per massimizzare $I(X;Y)$.*
(5) *siano C_1 e C_2 le rispettive capacità dei due sotto-canali W_1 e W_2, mostrare che*
$$max_p I(X;Y) = max_\alpha H(\alpha) + \alpha C_1 + (1-\alpha) C_2$$
(6) *mostrare che la capacità del canale W è data da*
$$C = \log(2^{C_1} + 2^{C_2})$$
in funzione delle capacità dei sottocanali C_1 e C_2.

Esercizio 2. *Mostrare che per ogni codice lineare di tipo (n, k) con minima distanza tra le parole codice $2t + 1$ dove k è la lunghezza in bit del segnale, $n - k$ è il numero di bit di ridondanza (ad esempio i bit di parità).*

(1) *Mostrare il limite superiore alla possibilità di correggere t errori è data dalla seguente formula*

$$n - k \geq \log_2 \left[1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{t} \right]$$

Esercizio 3. *Codificare con l'algoritmo Lempel-Ziv il seguente vettore binario:*

010 101 111 101 100 100 001 000 110 111 101 101 00.

Esercizio 4. *Si considerino le seguenti variabili aleatorie $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, e $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. con distribuzione congiunta :*

$p(U, V)$	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	$1/6$	$1/12$	$1/24$	$1/24$
u_2	$1/24$	$1/6$	$1/12$	$1/24$
u_3	$1/24$	$1/24$	$1/6$	$1/12$

Rispondere ai seguenti quesiti relativamente alla distribuzione congiunta data in tabella:

(1) *calcolare $H(U)$ ed $H(V|U)$;*

(2) *calcolare il codice Huffman C_U per U;*

(3) *per ogni $u \in U$ calcolare il codice Huffman $C_{V|u}(v|u)$ per la distribuzione di $v \in V$ dato u;*

(4) *costruire per concatenazione il codice $C_{UV}(u, v)$ per la sorgente (U, V);*

Si consideri ora una generica coppia di variabili aleatorie U, V:

(1) *cosa si può dire della lunghezza della parola codice $C_{UV}(u, v)$ assegnata alla coppia (u, v) in funzione delle lunghezze delle parole codice associate separatamente da C_U a u e da $C_{V|u}$ a v dato u?*

(2) *calcolare la lunghezza media $L(C_{UV})$ del codice C_{UV} e mostrare che*

$$H(U, V) \leq L(C_{UV}) < H(U, V) + 2.$$