Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2005/2006
TN1- Introduzione alla teoria dei numeri
Esercizi
11 maggio 2006

1. Sia $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ la decomposizione in fattori primi distinti, mostrare che
$$\sigma^k(n) = \prod_{r}^{i=1} \frac{p_i^{k(e_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}$$

2. Sia $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ la decomposizione in fattori primi distinti, mostrare che
   (a) $\sum_{d|n} \mu(d)d = \prod_{i=1}^{r}(1 - p_i)$
   (b) $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{p_i})$
   (c) $\sum_{d|n} \mu(d)\tau(d) = (-1)^r$
   (d) $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d) = (-1)^r \prod_{i=1}^{r} p_i$
   (e) $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma^k(d) = (-1)^r \prod_{i=1}^{r} p_i^k$
   (f) $\sum_{d|n} \mu(d)\varphi(d) = \prod_{i=1}^{r}(2 - p_i)$

3. Calcolare l'inversa di Möbius delle funzioni aritmetiche φ, τ, σ e e.

4. Sia $F = \tau \star \sigma^2$
   (a) Calcolare $F(28)$
   (b) Sia f l'inversa do Möbius di F. Calcolare $f(28)$

5. Sia $F = \tau \star \varphi^{-1}$
   (a) Calcolare $F(12)$
   (b) Sia f l'inversa do Möbius di F. Calcolare $f(12)$

6. Sia $n \in \mathbb{N}$ e ζ una radice n-esima primitiva dell'unità. Utilizzando opportunamente la formula di inversione di Möbius, mostrare che:
   (a) $\mu(n) = \sum_{1 \leq k \leq n. MCD(k,n)=1} \zeta^k$
   (b) $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_n(x)$ e $\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^{\frac{n}{d}-1})^{\mu(d)}$
   (c) Dedurre da (b) che $\Phi_n \in \mathbb{Z}[x]$