

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN1
Tutorato 10 - 23 maggio 2006

1. Per ogni intero $n > 1$, sia: $F(n) := \sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d)$.
 - (a) Dimostrare che $F = \mu\sigma * 1$ (dove $(\mu\sigma)(n) := \mu(n)\sigma(n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$) è una funzione moltiplicativa.
 - (b) Sia $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$ la fattorizzazione in primi distinti di un intero positivo $n > 1$. Mostrare che $F(n) = (-1)^r p_1 p_2 \dots p_r$.
 - (c) Calcolare $F(630)$.
 - (d) Determinare tramite la formula di inversione di Mobius, la funzione moltiplicativa f tale che $F = \sigma_f$. Calcolare $f(12)$.

2. Sia data la funzione τ .
 - (a) Per ogni intero fissato $k > 1$, dimostrare che esistono infiniti interi positivi n in modo tale che $\tau(n) = k$.
 - (b) Trovare che la funzione τ^{-1} [funzione inversa (rispetto al prodotto $*$ di Dirichlet) della funzione moltiplicativa τ] un'espressione del tipo $\tau^{-1} = \alpha * \beta$, cioè, un'espressione in termini del prodotto di Dirichlet di due funzioni moltiplicative $\alpha, \beta \in \{e, \sigma, \tau, \phi, u, \lambda, 1\}$.
 - (c) Calcolare $\tau^{-1}(n)$, per $n = 1, 2, 3, 4, 6, 8$.

3.
 - (a) Dati due interi positivi a ed n , con $\text{MCD}(a, n) = 1$, descrivere quali relazioni intercorrono fra il valore del simbolo di Jacobi (a/n) e la risolubilità della congruenza $X^2 \equiv a \pmod{n}$.
 - (b) Calcolare il simbolo di Jacobi $(15/119)$.
 - (c) Determinare tutte le eventuali soluzioni della congruenza $X^2 \equiv p \pmod{q}$, al variare degli interi primi p e q , tali che $p \mid 15$ e $q \mid 119$.

4. Sia $*$ il prodotto di Dirichlet di funzioni aritmetiche. Si ponga $F := \sigma * \tau$.
 - (a) Calcolare $F(15)$.
 - (b) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius tale che $F = f * 1$. Calcolare $f(15)$.

5. Sia $n = 18$.
 - (a) Determinare se n possiede una radice primitiva dell'unità. In caso affermativo determinare la più piccola radice primitiva $r \pmod{18}$ e descrivere la tabella degli indici rispetto ad r , al variare di a nel sistema ridotto minimo positivo $\pmod{18}$.
 - (b) Calcolare il simbolo di Jacobi: $(83 + \lambda/18)$ al variare di λ , con $0 \leq \lambda \leq 2$.
 - (c) Determinare per quali valori di λ , con $0 \leq \lambda \leq 2$, l'equazione diofantea in due indeterminate: $X^2 - 18Y - 83 - \lambda = 0$ è risolubile e, per ciascuno dei valori di λ per i quali è risolubile, determinare esplicitamente le sue soluzioni.