Compito di esonero

corso AC1 - a.a. 05/06

1) (0.90 – 1 molt.) Trovare tutti i valori di $\sqrt[3]{i}$.

2) (4 pti) Studiare la convergenza della serie:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in}}{n} z^n$$

3) (6 pti) Determinare gli zeri delle seguenti funzioni e il loro ordine:

$$f(z) = (z^2 + \pi^2)(1 + e^{-z}); \qquad g(z) = z^2 \sin z$$

4) (5 pti) Dimostrare che la funzione $f(z) = z - 3\bar{z} + 2\,\mathrm{Re}(z)$ non è analitica in alcun punto di $\mathbf{C}$.

5) (6 pti) Sia $f(z) = f(x + iy)$ analitica in un aperto connesso U. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera motivando la risposta:

(i) Se $\mathrm{Re}(f)$ è costante allora f è costante.

(ii) Se $\mathrm{Re}(f)$ è costante rispetto ad y allora f è costante.

(iii) $f + i\bar{f}$ è aperta.

6) (3 pti) Sia $f(z) = z^3$. Determinare il luogo dei punti in cui f è (a) un isomorfismo analitico locale, (b) un isomorfismo analitico.

7) (9 pti) Calcolare i seguenti integrali:

(i) $\int_C (z^2 + z\bar{z})\, dz$

dove C è la semicirconferenza $|z| = 1$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi$, percorsa in senso antiorario.

(ii) $\int_C e^{\bar{z}}\, dz$

dove $C = [0, \pi - i\pi]$ è il segmento congiungente i punti 0 e $\pi - i\pi$.

(iii) $\int_C z \cos z\, dz$

dove C è la poligonale $\{[0,1],[1,i]\}$.