

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AC310 (ex AC1)
A.A. 2011-2011 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

TUTORATO 1
28 SETTEMBRE 2011

1. Scrivere i seguenti numeri in forma esponenziale:

a) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

d) $(4 + 6i)^{-1}$

b) $2 + 4i$

e) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - \sqrt{3}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

c) $6 - 3i$

f) $\sin \alpha - i \cos \alpha$

2. Trovare la parte reale ed immaginaria delle seguenti espressioni:

a) $\frac{z+4}{z}$

c) $\frac{z^3}{z-3}$

b) z^2

d) $\sin(z)$

3. Descrivere i seguenti insiemi del piano:

a) $\text{Im}(z^2) > 3$

d) $|z+i|=3$

b) $\text{Re}(z^{-1}) < 0$

e) $\bar{z} = z^{-1}$

c) $z + 4\bar{z} - 3 = 0$

f) $\text{Im}(\overline{z^2 - \bar{z}}) = 2 - \text{Im}(z)$

4. Dimostrare che l'equazione $|z-a| + |z+a| = 2|c|$ ha soluzioni se e solo se $|a| \leq |c|$.

5. Mostrare che, se z è sul cerchio unitario e $|a| > 4$, allora $z = \frac{z-a}{1-a\bar{z}}$

6. Siano z e w numeri complessi. Dimostrare che l'area del triangolo Ozw è $\frac{1}{2}|\text{Im}(z\bar{w})|$.

7. Trovare il limite delle seguenti successioni per $n \rightarrow \infty$:

a) i^n

c) $\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{i\frac{\pi}{n}}$

e) $n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + in \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

b) $\frac{i^n}{n}$

d) $\frac{n+2i}{3n+7i}$

f) $\cos n + i\frac{1}{n}$

8. Sia $\mathbb{C}[[X]]$ l'anello delle serie formali a coefficienti complessi.

a) Mostrare che $\mathbb{C}[[X]]$ è un dominio d'integrità.

b) Dimostrare che $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots$ è invertibile in $\mathbb{C}[[X]]$ se e solo se $a_0 \neq 0$.

c) Dedurre che l'ideale (X) è l'unico ideale massimale di $\mathbb{C}[[X]]$.

d) $\mathbb{C}[[X]]$ è un dominio euclideo?

e) Quali proprietà di \mathbb{C} sono state usate?

9. È vero che, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$? E se al posto di 0 c'è 1? (Nel caso la risposta sia negativa, fornire un controesempio.)