Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2014/2015
Complementi di Matematica
Primo appello/secondo esonero – 26 Giugno 2015.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Ammesso al 2^0 esonero: SI NO (Il 2^0 esonero consiste degli esercizi 0(ii)(iii)(iv), 2,3,4)
Deve verbalizzare come: GEOMETRIA CALCOLO 2
Sostiene l'esame da 3 crediti: SI NO (Se SI svolgere solo gli esercizi 0(iii)(iv), 2,3,4)

Esercizio 0. Per ciascuno dei seguenti quesiti, il candidato è tenuto esclusivamente a barrare le risposte esatte, senza indicare alcuna motivazione. Ogni risposta esatta dà un punteggio positivo, ogni risposta errata un punteggio negativo, le risposte non date valgono 0.

(i) Determinare un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $(1, 1, 1)$ e $(-3, -2, 1)$ e parallelo al vettore $(1, 0, 2) \wedge (0, -1, -1)$.

Risposte: I: $-3X + 4Y - 2Z + 1 = 0$, II: $3X - 4Y - 3Z + 4 = 0$, III: $X + Y + Z = 3$, IV: nessuno dei precedenti.

Soluzione: I

(ii) Si consideri la conica: $C : x^2 - 2xy + y^2 + 1 = 0$. Barrare le affermazioni corrette tra le seguenti:

Risposte: I: C è un'ellisse degenere. II: C è una parabola doppiamente degenere. III: C è una parabola semplicemente degenere. IV: C è una conica a centro. V: C è una circonferenza.

Soluzione: III

(iii) Calcolare l'integrale $I = \int_D \sqrt{|x + y - 1|}dxdy$ dove D è il triangolo delimitato dagli assi coordinati e dalla retta $x + y = 1$.

Risposte: I: 2/5, II. 4/15, III: −2/3, IV: 9/15, V: nessuno dei precedenti.

Soluzione: (II) ZW p. 383

(iv) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione della forma: $F(x, y) = ax + f(y)$ dove $a < 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di classe C^1. Quali delle seguenti affermazioni sono esatte:

I: F ha un massimo relativo, II: Tutti i punti critici di F sono punti di sella, III: F ha un punto di sella in $(0, 0)$, IV: $(0, 0)$ è critico per F. V: nessuno dei precedenti.

Soluzione: II

Esercizio 1. Si consideri la forma quadratica $q(x, y, z) = -x^2 + 2xy - y^2 - z^2$. Classificare q, determinare una base ortonormale diagonalizzante, la forma diagonale corrispondente e la forma canonica di Sylvester.

Svolgimento:

Soluzione: Matrice di q è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $-2, -1, 0$. Semidefinita negativa. Segnatura $(0, 2)$. Base ortonormale:

$$v_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0),\ v_{-1} = (0, 0, 1),\quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

Forma diagonale: $-2Z_1^2 - Z_2^2$. Forma di Sylvester: $-Z_1^2 - Z_2^2$.

Esercizio 2. Si classifichi la seguente equazione differenziale:

$$y' + y = t^3$$

e se ne determini l'integrale generale, giustificando tutti i passaggi eseguiti.

Svolgimento:

Soluzione: Equazione lineare del primo ordine. Integrale generale:

$$y = Ce^{-t} + t^3 - 3t^2 + 6t - 6, \quad C \in \mathbb{R}$$

Esercizio 3. Si consideri il campo vettoriale:

$$V(x, y) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right)$$

Dopo averne determinato il più grande aperto di definizione se ne calcoli la circuitazione lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 6,5. Motivare la risposta.

Svolgimento: V è definito in $A = \{(x, y) : y \neq 0\}$. La circonferenza assegnata non è contenuta in A e quindi il lavoro lungo di essa non è definito. Si osservi che il campo è conservativo perché la funzione $U = \frac{x}{y}$ ne è un potenziale.

Esercizio 4. Si consideri la curva differenziabile $\alpha(t) = (\cos t, 1 - \sin t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Si verifichi che α è regolare. Verificare se α è a velocità unitaria. Se ne calcolino nel punto $\alpha(0)$:

velocità, curvatura, torsione, triedro di Frenet, centro di curvatura, piano osculatore.

Svolgimento:

Soluzione: $\alpha'(t) = (-\sin t, -\cos t, 2t)$. $v(t) = ||\alpha'|| = (1 + 4t^2)^{1/2}$ è ovunque diversa da zero per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi la curva è regolare. Non è a velocità unitaria.

$\alpha''(t) = (-\cos t, \sin t, 2)$, $\alpha'''(t) = (\sin t, \cos t, 0)$

In $\alpha(0) = (1, 1, 0)$ si ha: $v(0) = 1$, $\alpha'(0) = (0, -1, 0) = \mathbf{T}(0)$,

$\alpha''(0) = (-1, 0, 2)$, $\alpha'(0) \wedge \alpha''(0) = (-2, 0, -1)$, $\kappa(0) = \frac{||\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)||}{v(0)^3} = \sqrt{5}$.

$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{||\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)||} \alpha'(0) \wedge \alpha''(0) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$,

$\mathbf{N}(0) = \mathbf{B}(0) \wedge \mathbf{T}(0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Centro di curvatura $\mathbf{c}(0) = \alpha(0) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{4}{5}, 1, \frac{2}{5}\right)$.

Piano osculatore: $\mathbf{B}(0) \bullet (X - 1, Y - 1, Z) = 0$, cioè $-2X - Z + 2 = 0$.