Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2014/2015
Complementi di Matematica - canale A-K
Secondo appello – 15 Luglio 2015.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Barrare esclusivamente una delle seguenti caselle:
Deve verbalizzare come: GEOMETRIA ☐ CALCOLO 2 ☐
Sostiene l'esame da 3 crediti (da verb. con prof. Tolli): ☐ (Se SI svolgere solo gli esercizi 0(iii), 2,3,4)

Esercizio 0. Per ciascuno dei seguenti quesiti, il candidato è tenuto esclusivamente a barrare le risposte esatte, senza indicare alcuna motivazione. Ogni risposta esatta dà un punteggio positivo, ogni risposta errata un punteggio negativo, le risposte non date valgono 0.

(i) Determinare un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $Q = (1, -1, -2)$ e parallelo alle rette $r : X - Y - 1 = X + Z - 5 = 0, \quad s : X = 1, \quad Z = 2.$

Risposte: I: $X + Z + 1 = 0$, II: $2X + Z = 0$, III: $Y + 1 = 0$, IV: $X + Y + Z + 2 = 0$. V: nessuno dei precedenti.

Soluzione: I

(ii) Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione: $4X^2 - 4XY + 7Y^2 + 4X - 2Y = 0$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

Risposte: I: $\mathcal{C}$ è una conica degenere, II: è un'ellisse degenere, III: è un'iperbole, IV: è una conica a centro, V: nessuna delle precedenti.

Soluzione: IV

(iii) Calcolare l'integrale:

$$\int\int_D \sin(x - y)dxdy$$

dove D è il triangolo definito da $x \leq \frac{\pi}{2}, \;\; y \leq \frac{\pi}{2}, \;\; x + y \geq 0.$

Risposte: I: $\frac{\pi}{2}$, II: 0, III: 1, IV: -1, V: nessuno dei precedenti.

Soluzione: II

Esercizio 1. Si determini la segnatura della forma quadratica:
$$q(X,Y,Z) = X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 2XY + 2XZ$$
Si esibisca un cambiamento ortogonale di coordinate che porta q in forma diagonale.

Svolgimento:

Soluzione: Autovalori: 3,2,0. Segnatura $(2,0)$.
Base ortonormale di autovettori: $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)\right\}$.
Matrice del cambiamento di coordinate:
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si determini la soluzione generale della seguente equazione differenziale:

$$y' + y \cot x = \frac{x}{\sin x}$$

Svolgimento:

Soluzione:

$$y = \frac{x^2 + C}{2 \sin x}$$

Esercizio 3. Determinare e classificare i punti critici della funzione definita in $\mathbb{R}^2$:

$$F(X, Y) = 2X^3 + Y^3 - 3X^2 - 3Y$$

Svolgimento:

Soluzione: $F_X = 6X^2 - 6X, \quad F_Y = 3Y^2 - 3.$
Punti critici: $(0, 1),\ (0, -1),\ (1, 1),\ (1, -1)$.

Matrice hessiana: $H(X, Y) = \begin{pmatrix} 12X - 6 & 0 \\ 0 & 6Y \end{pmatrix}$
I 4 punti critici sono rispettivamente di sella, massimo relativo, minimo relativo, di sella.

Esercizio 4. Si consideri la curva differenziabile
$$\alpha(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$
a) Si determini il più grande intervallo contenente il punto $t = 1$ nel quale α è regolare motivando la risposta. Inoltre si calcolino:

b) equazione del piano osculatore in tutti i punti della curva.

c) triedro di Frenet, curvatura e centro di curvatura nel punto $\alpha(1)$.

Svolgimento:

Soluzione: a) La curva è di classe C^∞, ma il vettore velocità si annulla se e solo se $t = 0$. Quindi l'intervallo cercato è $(0, +\infty)$.

b) $-(X - \frac{t^4}{4}) + 2t(Y - \frac{t^3}{3}) - t^2(Z - \frac{t^2}{2}) = 0$

c) $\alpha' = (t^3, t^2, t)$, $\alpha'' = (3t^2, 2t, 1)$, $\alpha' \wedge \alpha'' = (-t^2, 2t^3, -t^4)$,

$(\alpha' \wedge \alpha'')(1) = (-1, 2, -1)$, $||(\alpha' \wedge \alpha'')(1)|| = \sqrt{6}$, $v(1) = \sqrt{3}$, $\kappa(1) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$, $C(1) = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{3}, -1\right)$.