Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2014/2015
Complementi di Matematica - canale A-K
Terzo appello – 17 Settembre 2015.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Barrare esclusivamente una delle seguenti caselle:
Deve verbalizzare come: GEOMETRIA ☐ CALCOLO 2 ☐
Sostiene l'esame da 3 crediti (da verb. con prof. Tolli): ☐ (Se SI svolgere solo gli esercizi 0(iii), 2,3,4)

Esercizio 0. Per ciascuno dei seguenti quesiti, il candidato è tenuto esclusivamente a barrare le risposte esatte, senza indicare alcuna motivazione. Ogni risposta esatta dà un punteggio positivo, ogni risposta errata un punteggio negativo, le risposte non date valgono 0.

(i) Determinare un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ contenente la retta di equazioni parametriche $x = -3t,\ y = t - 2,\ z = t$ e parallelo alla retta passante per i punti $(2, 0, 1)$ e $(1, 0, 2)$.

Risposte: (I) $x + 2y + z + 4 = 0$, (II) $x + y + z = 0$,
(III) $x - 2y + z + 4 = 0$, (IV) nessuno dei precedenti.

Soluzione: (I).

(ii) Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione: $4X^2 - 4XY + 7Y^2 + 4X - 2Y = 0$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

Risposte: I: è una conica degenere, II: non ha punti reali III: è un'iperbole, IV: è una conica a centro, V: nessuna delle precedenti.

Soluzione: IV

(iii) Calcolare l'integrale:
$$\int\int_D \sqrt{|1 - x - y|}\,dxdy$$
dove D è il rettangolo definito dalle limitazioni: $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1$.

Risposte: I: $\frac{\pi}{2}$, II: 0, III: -1/15, IV: 14/4, V: 4/15,
VI: nessuno dei precedenti.

Soluzione: V

Esercizio 1. Si Consideri la forma quadratica:

$$q(X,Y,Z) = 2X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 2XY$$

Si classifichi q, se ne determini la forma diagonale ottenuta mediante cambiamento ortogonale di coordinate, la relativa base ortonormale, la forma canonica di Sylvester e la base di Sylvester.

Svolgimento:

Soluzione: Matrice di q:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autovalori: 3,2,1. Segnatura $(3,0)$. Definita positiva.

Base ortonormale: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), (0,0,1), \ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \right\}$. Forma diagonale: $3Y_1^2+2Y_2^2+Y_3^2$.

Forma di Sylvester: $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2$.

Base di Sylvester: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \right\}$

Esercizio 2. Si determini la soluzione generale della seguente equazione differenziale e il suo insieme di definizione **I**:

$$y' + \frac{y}{t^2} = e^{\frac{1}{t}}$$

Determinare inoltre la soluzione del problema di Cauchy determinato dalle condizioni iniziali $y(1) = 0$ e il relativo intervallo di definizione **J**.

Svolgimento:

Soluzione:

$y = (C + t)e^{\frac{1}{t}}, \quad \mathbf{I} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Cauchy: $y = (t - 1)e^{\frac{1}{t}}, \quad \mathbf{J} = (0, \infty)$

Esercizio 3. Determinare e classificare i punti critici della funzione definita in $\mathbb{R}^2$:

$$F(X, Y) = X + 4Y^3 - 2XY^2 + 2015$$

Svolgimento:

Soluzione: $F_X = -2Y^2 + 1, \quad F_Y = 12Y^2 - 4XY$.
Punti critici: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Matrice hessiana: $H(X, Y) = \begin{pmatrix} 0 & -4Y \\ -4Y & 24Y - 4X \end{pmatrix}$
I 2 punti critici sono di sella.

Esercizio 4. Si consideri la curva differenziabile

$$\alpha(t) = (t, 3\sin t, 3\cos t)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Si determini il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ nel quale α è regolare motivando la risposta. Inoltre si calcolino il triedro di Frenet, curvatura e torsione in ogni punto.

Svolgimento:

Soluzione: a) La curva è di classe C^∞, e il vettore velocità $\alpha'(t) = (1, 3\cos t, -3\sin t)$ è sempre $\neq 0$: quindi α è regolare in tutto $\mathbb{R}$.

$\alpha'' = (0, -3\sin t, -3\cos t)$, $\alpha' \wedge \alpha'' = (-9, 3\cos t, -3\sin t)$, $v(t) = \sqrt{10}$,
$\alpha''' = (0, -3\cos t, 3\sin t)$,

$\kappa(t) = \frac{3}{10}$.

$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3\cos t, -3\sin t)$, $\mathbf{N} = (0, -\sin t, -\cos t)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, \cos t, -\sin t)$.

$$\tau(t) = \frac{\alpha' \wedge \alpha'' \bullet \alpha'''}{||\alpha' \wedge \alpha''||^2} = -\frac{1}{10}$$