Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2014/2015
Complementi di Matematica - canale A-K
Quarto appello – 29 Gennaio 2016

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Barrare esclusivamente una delle seguenti caselle:
Deve verbalizzare come: GEOMETRIA ☐ CALCOLO 2 ☐
Sostiene l'esame da 3 crediti (da verb. con prof. Tolli): ☐ (In questo caso svolgere solo gli esercizi 0(i),0(ii), 4 e uno a scelta tra gli esercizi 2,3)

Esercizio 0. Per ciascuno dei seguenti quesiti, il candidato è tenuto esclusivamente a dare le risposte. Non è richiesto di indicare il procedimento seguito.

(i) Determinare l'insieme A di definizione della funzione di due variabili reali: $f(x, y) = \log[(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)]$

Soluzione: $4 < x^2 + y^2 < 16$

(ii) Calcolare l'integrale doppio $\iint_R (x^2 + y^2)dxdy$ dove R è la regione del piano delimitata dalle curve $y = x^2$, $x = 2$, $y = 1$.

Soluzione: $\frac{1006}{105}$

(iii) Determinare un'equazione cartesiana del piano π di $\mathbb{R}^3$ contenente la retta r di equazioni $\frac{X-1}{2} = \frac{Y-2}{3} = \frac{Z}{4}$ e perpendicolare al piano α di equazione $2X + 2Y + Z = 0$.

Soluzione: $5X - 6Y + 2Z + 7 = 0$

Esercizio 1. Si consideri la forma quadratica:

$$q(X,Y,Z) = -X^2 - Y^2 + Z^2 - 2XY$$

Si classifichi q, se ne determini la forma diagonale ottenuta mediante cambiamento ortogonale di coordinate, la relativa base ortonormale, la segnatura, la forma canonica di Sylvester e la base di Sylvester.

Soluzione: Matrice di q:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalori: -2,1,0. Segnatura $(1,1)$. Indefinita degenere.

Base ortonormale: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), (0,0,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \right\}$. Forma diagonale: $-2Z_1^2 + Z_2^2$.

Forma di Sylvester: $-Z_1^2 + Z_2^2$.

Base di Sylvester: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), (0,0,1), (-1,1,0) \right\}$

Esercizio 2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$y'(t) - \tan(t)y = \frac{1}{\cos(t)}, \quad y(0) = 1$$

e l'intervallo di esistenza, giustificando tutti i passaggi.

Soluzione: $y(t) = \frac{1+t}{\cos(t)}$. Intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Esercizio 3. Determinare e classificare i punti critici della funzione definita in $\mathbb{R}^2$:

$$F(X, Y) = (X + Y^2)e^X$$

Soluzione: $f_X = e^X(1 + X + Y^2)$, $f_Y = 2Ye^X$. Punto critico $P = (-1, 0)$. La matrice hessiana in P è $H = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$. $(-1, 0)$ è un minimo relativo.

Esercizio 4. Si consideri la curva differenziabile $\alpha(t) = (\sin t, t^2, 1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$. Si verifichi che α è regolare. Verificare se α è a velocità unitaria. Se ne calcolino nel punto $\alpha(0)$:

velocità, curvatura, torsione, triedro di Frenet, centro di curvatura, piano osculatore.

Soluzione: $\alpha'(t) = (\cos t, 2t, \sin t)$. $v(t) = ||\alpha'|| = (1 + 4t^2)^{1/2}$ è ovunque diversa da zero per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi la curva è regolare. Non è a velocità unitaria.

$\alpha''(t) = (-\sin t, 2, \cos t), \quad \alpha'''(t) = (-\cos t, 0, -\sin t)$

$\alpha' \wedge \alpha'' = ((-2(\cos t + t \sin t), 2(\sin t - t\cos t), -1)$.

In $\alpha(0) = (0, 0, 0)$ si ha: $v(0) = 1$, $\alpha'(0) = (1, 0, 0) = \mathbf{T}(0)$,

$\alpha''(0) = (0, 2, 1)$, $\alpha'(0) \wedge \alpha''(0) = (0, -1, 2)$, $\kappa(0) = \frac{||\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)||}{v(0)^3} = \sqrt{5}$.

$\tau(0) = 0$.

$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{||\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)||} \alpha'(0) \wedge \alpha''(0) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$,

$\mathbf{N}(0) = \mathbf{B}(0) \wedge \mathbf{T}(0) = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Centro di curvatura $\mathbf{c}(0) = \alpha(0) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(0, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Piano osculatore: $\mathbf{B}(0) \bullet (X, Y, Z) = 0$, cioè $-Y + 2Z = 0$.