Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2014/2015
Complementi di Matematica
Prima prova di valutazione in itinere – 18 Aprile 2015.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Esercizio 0. Per ciascuno dei seguenti quesiti, il candidato è tenuto esclusivamente a barrare le risposte esatte, senza indicare alcuna motivazione. Ogni risposta esatta dà un punteggio positivo, ogni risposta errata un punteggio negativo, le risposte non date valgono 0.

(i) Determinare il valore del parametro m tale che il prodotto vettoriale $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ m \\ 2 \end{pmatrix}$ sia parallelo al piano di equazione $X + Y + Z - 127 = 0$.

Risposte: (A) -2 (B) $1/2$ (C) 1 (D) 2.
Soluzione: (D)

(ii) Calcolare la matrice del prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Risposte: $(A) \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $(B) \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $(C) \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $(D) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$
Soluzione: (A)

(iii) Calcolare l'area del triangolo in $\mathbb{R}^2$ di vertici $P(0,0)$, $Q(1,3)$ ed R, dove R è il simmetrico di $S = (-1,-1)$ rispetto a Q.

Risposte: (A) 0, (B) 2, (C) 3/2, (D) 1.
Soluzione: (D)

(iv) Determinare la retta per $P = (2,1) \in \mathbb{R}^2$ tale che P sia il punto medio del segmento di estremi i punti di intersezione della retta con gli assi coordinati.

Risposte: (A) $X + Y = 1$, (B) $X + 2Y = 4$, (C) $2X + Y = 0$, (D) $X + 2Y = 0$.
Soluzione: (B)

Esercizio 1. Determinare equazioni della retta s parallela alla retta

$$r : X = 2Y = 3Z,$$

e incidente le rette

$$r_1 : X - 1 = Y - Z = 0, \quad r_2 : 2X + Y = 2X - Z - 5 = 0$$

spiegando il procedimento seguito (scrivere solo il risultato finale non è accettato come soluzione).

Soluzione: La retta richiesta s è individuata dai piani α e β paralleli ad r e passanti rispettivamente per r_1 e per r_2. Un vettore di direzione della retta r è $v = (6, 3, 2)$. Il fascio di piani per r_1 è

$$\lambda(Y - Z) + \mu(X - 1) = 0$$

La condizione di parallelismo con r è $6\mu + 3\lambda - 2\lambda = 0$, e quindi una soluzione è $(\lambda, \mu) = (-6, 1)$. Il piano α è pertanto $X - 6Y + 6Z - 1 = 0$. Analogamente per β si trova l'equazione

$$2X - 2Y - 3Z - 15 = 0$$

La retta cercata s ha quindi equazioni:

$$X - 6Y + 6Z - 1 = 2X - 2Y - 3Z - 15 = 0$$

Esercizio 2. Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base

$$\mathbf{b} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$ determinare una base ortogonale rispetto al prodotto scalare standard.

Soluzione: La base $\mathbf{v}$ cercata è: $v_1 = b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$v_2 = b_2 - \frac{b_2 \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = b_3 - \frac{b_3 \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1 - \frac{b_3 \bullet v_2}{v_2 \bullet v_2} v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(X,Y,Z) = -X^2 - Y^2 - Z^2 + 2XY + 2XZ + 2YZ$$

a) classificare q e determinarne la segnatura. b) trovare una base ortonormale rispetto alla quale q sia diagonalizzata. c) calcolarne l'espressione in tale base. d) Determinare una base di Sylvester e la forma canonica di Sylvester.

Soluzione: La matrice della forma bilineare è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ed il suo polinomio caratteristico è $P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$, e quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Pertanto q è non degenere, indefinita con segnatura $(1,2)$.

L'autospazio V_1 è generato dal vettore $v_1 = (1,1,1)$, che normalizzato diventa $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

L'autospazio V_{-2} ha equazione $X + Y + Z = 0$. Una sua base è evidentemente data da $\{v_2 = (1,-1,0),\ v_3 = (0,1,-1)\}$. Applicando Gram-Schmidt si ottiene la coppia di vettori ortogonali tra loro:

$$w_2 = v_2,\ w_3 = (1/2, 1/2, -1)$$

i quali, normalizzati, danno la base ortonormale

$$\left\{u_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), u_3 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -\sqrt{2/3})\right\}$$

di V_{-2}.

Quindi una base ortonormale che diagonalizza q è $\{u_1, u_2, u_3\}$ e in tale base l'espressione di q è:

$$q(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_3^2$$

La corrispondente base di Sylvester è

$$\left\{u_1, \frac{u_2}{\sqrt{2}}, \frac{u_3}{\sqrt{2}}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

e la forma canonica di Sylvester è $X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$.