Esercitazione del 13 maggio 2016

Esercizio 1. Le equazioni

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x = t \\ \\ y = t \end{cases} t \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{C}_2 : \begin{cases} x = t^3 \\ \\ y = t^3 \end{cases} t \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{C}_3 : \begin{cases} x = \tan s \\ \\ y = \tan s \end{cases} -\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2}$$

rapppresentano lo stesso insieme di punti, ossia hanno la stessa curva sostegno che è la bisettrice del I e del III quadrante $y = x$; come curve parametrizzate, però, sono diverse. Si può dire che tale bisettrice, ad esempio, è stata percorsa in modo da arrivare dopo

- $t = 1$ secondi in
  - $P_1 = (1, 1)$ tramite $\mathcal{C}_1$
  - $Q_1 = (1, 1)$ tramite $\mathcal{C}_2$
- $t = \frac{\pi}{3} \sim 1.05$ secondi in
  - $P_2 = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \sim (1.05, 1.05)$ tramite $\mathcal{C}_1$
  - $Q_2 = ((\frac{\pi}{3})^3, (\frac{\pi}{3})^3) \sim (1.16, 1.16)$ tramite $\mathcal{C}_2$

Esercizio 2. Sia data la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = -t^2 - 1 \\ y(t) = 2t^2 + 1 \\ z(t) = t \end{cases}$$

- essa è contenuta nel piano $2x + y + 1 = 0$; infatti l'equazione $a(-t^2 - 1) + b(2t^2 + 1) + ct + d = 0$ è identicamente soddisfatta per $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.
- i parametri direttori della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P = (x(1), y(1), z(1)) = (-2, 3, 1)$ sono

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1} = -2 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = 4 \qquad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = 1$$

Esercizio 3. Calcolare

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}\, dx$$

Svolgimento. Posto $\sqrt{x^2 + a} = -x + t$ si ha

$$x = \frac{t^2 - a}{2t} \qquad dx = \frac{t^2 + a}{2t^2} dt \tag{1}$$

$$\sqrt{x^2 + a} = -x + t = -\frac{t^2 - a}{2t} + t = \frac{t^2 + a}{2t} \tag{2}$$

quindi

$$I = \int \frac{2t}{t^2 + a} \frac{t^2 + a}{2t^2}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt = \log t + c = \log(x + \sqrt{x^2 + a}) + c$$

Esercizio 4. Calcolare

$$I = \int \sqrt{x^2 + a}\, dx$$

Svolgimento. Integrando per parti, prendendo $\sqrt{x^2+a}$ come fattore finito e dx come fattore differenziale, si ha

$$\begin{aligned}
I = & x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx \\
= & x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx + a\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx
\end{aligned}$$

Da qui, tenendo conto del precedente esercizio e del fatto che $\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}} = \sqrt{x^2+a}$, si ha

$$I = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\log(x+\sqrt{x^2+a})$$

ossia

$$2I = x\sqrt{x^2+a} + a\log(x+\sqrt{x^2+a})$$

quindi

$$I = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2+a} + a\log(x+\sqrt{x^2+a})\Big) + c$$

Esercizio 5. La parabola $4x^2 + y = 4$, $y \geq 0$ può essere rappresentata da entrambi i gruppi di equazioni

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x = \cos\theta \\ & t \in [0,\pi] \\ y = 4\sin^2\theta \end{cases} \qquad \mathcal{C}_2 : \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ & t \in [-2,2] \\ y = 4 - t^2 \end{cases}$$

La sua lunghezza è data da

$$\begin{aligned}
l_1 = & \int_0^\pi \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,d\theta = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (8\sin\theta\cos\theta)^2}\,d\theta \\
= & \int_0^\pi \sqrt{(\sin\theta)^2(1+64\cos^2\theta)}\,d\theta \overset{\sin\theta\geq 0 \text{ per } t\in[0,\pi]}{=} \int_0^\pi \sin\theta\sqrt{1+64\cos^2\theta}\,d\theta \\
\overset{\cos\theta = u \to -\sin\theta\ d\theta = du}{=} & -\int_1^{-1} \sqrt{1+64u^2}\,du = \int_{-1}^1 \sqrt{1+64u^2}\,du = 8\int_{-1}^1 \sqrt{u^2+\frac{1}{64}}\,du \\
\overset{\text{v. Esercizio 4}}{=} & 4\left(u\sqrt{u^2+\frac{1}{64}} + \frac{1}{64}\log(u+\sqrt{u^2+\frac{1}{64}})\right)\Big|_{-1}^1 = \sqrt{65} + \frac{1}{16}\log\left(\frac{\sqrt{65}+8}{\sqrt{65}-8}\right)
\end{aligned}$$

secondo $\mathcal{C}_1$ e da

$$\begin{aligned}
l_2 = & \int_{-2}^2 \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \int_{-2}^2 \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-2t)^2}\,dt \\
= & \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{1}{4}+4t^2}\,dt = 2\int_{-2}^2 \sqrt{t^2+\frac{1}{16}}\,dt \\
\overset{\text{v. Esercizio 4}}{=} & t\sqrt{t^2+\frac{1}{16}} + \frac{1}{16}\log(t+\sqrt{t^2+\frac{1}{16}})\Big|_{-2}^2 = \sqrt{65} + \frac{1}{16}\log\left(\frac{\sqrt{65}+8}{\sqrt{65}-8}\right)
\end{aligned}$$

secondo $\mathcal{C}_2$.