Esercitazione del 15 aprile 2016

Esercizio 1. I piani $\alpha : 2x - y + z - 3 = 0$ e $\beta : -6x + 3y - 3z + 1 = 0$ sono paralleli poiché $rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 1$ (le due righe sono proporzionali); essi non coincidono in quanto $rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ -6 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 2$, perché, ad esempio, $\left|\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{smallmatrix}\right| = -8 \neq 0$ (la non coincidenza avrebbe potuto essere vista anche scegliendo un punto a piacere di α, sia esso $P = (0, 0, 3)$, e verificando che le sue coordinate non verificano l'equazione di $\beta : -9 + 1 = -8 \neq 0$).
Il piano $\pi : 2x - y + z = 0$ è un piano:
- parallelo a α e β in quanto i coefficienti delle x, della y e della z sono proprio quelli di α;
- passa per l'origine O in quanto manca il termine noto.

Esercizio 2. Verificare che i due sistemi $S : \begin{cases} x = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ e $\Gamma : \begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ rappresentano la stessa retta.
Svolgimento. Una retta è individuata da una qualsiasi coppia di punti appartenenti ad essa, purché distinti; basta, quindi, verificare che se due punti hanno coordinate che verificano il sistema S, le loro coordinate soddisfano anche il sistema Γ. Presi ad arbitrio due punti P_1 e P_2 con coordinate soddisfacenti S, ad esempio $P_1 = (0, 0, -1)$ e $P_2 = (0, -1, 0)$, si vede che le loro coordinate verificano anche il 2° sistema in quanto $\Gamma(P_1) : \begin{cases} 0 - 0 + 1 - 1 = 0 \\ 0 + 0 - 1 + 1 = 0 \end{cases}$ e $\Gamma(P_2) : \begin{cases} 0 + 1 - 0 - 1 = 0 \\ 0 - 1 + 0 + 1 = 0 \end{cases}$.

Esercizio 3. Scrivere equazioni parametriche della retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x + 2y + z - 2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Svolgimento. Per procedere, si sceglie come parametro una variabile e si determinano, in funzione di questo, le altre due. La scelta $z = t$ (z parametro) non funziona in quanto porterebbe a $\begin{cases} x + y = t - 1 \\ 2x + 2y = 2 - t \end{cases}$ non risolubile rispetto a x e y perché $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right| = 0$; occorre, quindi, procedere diversamente.
La matrice incompleta del sistema (1) è $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ 2 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, di rango 2 essendo $\left|\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right| \neq 0$; il sistema (1) ammette, dunque, ∞^1 soluzioni che si ottengono ponendo $x = t$ e risolvendo il sistema $\begin{cases} y - z = -t - 1 \\ 2y + z = 2 - 2t \end{cases}$ le cui soluzioni sono $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3} - t \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$.
Non sarebbe stato lecito assumere z come parametro, in quanto vale $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right| = 0$ il minore che esclude i coefficienti di z.

Esercizio 4. Scrivere equazioi cartesiane della retta s passante per $P = (1, 1, 0)$ e parallela alla retta $r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2x + 3y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$.
Svolgimento. I metodo La retta $t : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ ha parametri direttori pro-

porzionali ai minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

ottenuti sopprimendo la prima, seconda, terza colonna e presi coi segni alternati; dunque la direzione di r è data dal vettore $\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\right) = 5(1,0,1)$. Una retta passante per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e parallela a una retta di parametri direttori (l, m, n) ha equazioni cartesiane scrivibili tramite la condizione $rg \begin{pmatrix} x - x_0 & l \\ y - y_0 & m \\ z - z_0 & n \end{pmatrix} = 1$; per la retta s cercata, questa condizione si scrive $rg \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ y-1 & 0 \\ z-0 & 1 \end{pmatrix}$ da cui $s : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$

II metodo La retta r è intersezione dei piani $\pi : x + y - z = 0$ e $\pi\pi : -2x + 3y + 2z - 4 = 0$; la retta s può ottenersi intersecando i piani α e β passanti per P e rispettivamente paralleli a π e $\pi\pi$, le cui equazioni sono $\alpha : x + y - z - 2 = 0$ e $\beta : -2x + 3y + 2z - 1 = 0$. Tali equazioni si ottengono, ad esempio, considerando che il piano $\gamma\gamma$ passante per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e parallelo a $\gamma : ax + by + cz + d = 0$ ha equazione $\gamma\gamma : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Le equazioni della retta cercata s sono allora $s : \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ -2x + 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$, diverse da quelle ottenute in precedenza (v. Esercizio 2).

Esercizio 5. Verificare se il piano $\pi : 4x - 5y + 4z - 4 = 0$ e la retta $r : \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ sono paralleli, incidenti oppure se r è contenuta in π.

Svolgimento. Risulta $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 24 - 12 - 20 = 0$, per cui r è parallela a π in senso lato; per scoprire se r è effettivamente parallela a π oppure è contenuta in π, si risolve il sistema formato dalle 3 equazioni e si vede se ammette o no soluzioni. Un metodo più rapido consiste nel vedere se un punto a piacere su r, per esempio $R = (0, 0, 1)$, appartiene o no a π; sostituendo le coordinate di R nell'equazione di π si ha $4 - 4 = 0$, ossia $R \in \pi$, dunque r è tutta contenuta in π. La conferma di questo fatto si ottiene così:

equazioni parametriche di r sono, ad esempio, $\begin{cases} x = t \\ y = -4t \\ z = 1 - 6t \end{cases}$

quindi il punto mobile su r è il punto $R(t) = (t, -4t, 1 - 6t)$ le cui coordinate, sostituite nell'equazione di π, forniscono $4t + 20t + 4 - 24t - 4 = 0$ ovvero l'identità $0 = 0$; questo vuol dire che tutti i punti di r apppartengono a π, cioè r giace su π.