Esercitazione del 18 marzo 2016

Esercizio 1.

- La matrice simmetrica
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
definisce in $\mathbb{R}^3$ un prodotto scalare $\langle , \rangle$ poiché A è definita positiva essendo
$$1 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0 \qquad \det A = 6 > 0;$$
inoltre risulta
$$\langle (x,y,z),(u,v,w) \rangle = (x,y,z)A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = xu+2yv+3zw \quad \forall\, (x,y,z),(u,v,w) \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$
Viceversa, si verifica che l'applicazione $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da (1) è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$; infatti:

$\alpha)$
$$\langle (x,y,z),(u,v,w) \rangle = \langle (u,v,w),(x,y,z) \rangle \;\; \forall\, (x,y,z),(u,v,w) \in \mathbb{R}^3.$$

$\beta)$
$$\begin{aligned} \langle (x,y,z),(u,v,w)+(a,b,c) \rangle &= \langle (x,y,z),(u+a,v+b,w+c) \rangle \\ &= xu + xa + 2yv + 2yb + 3zw + 3zc \\ &= \langle (x,y,z),(u,v,w) \rangle + \langle (x,y,z),(a,b,c) \rangle \\ &\forall\, (x,y,z),(u,v,w),(a,b,c) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

$\gamma)$
$$\begin{aligned} \langle k(x,y,z),(u,v,w) \rangle &= \langle (kx,ky,kz),(u,v,w) \rangle = k(xu+2yv+3zw) \\ &= k\langle (x,y,z),(u,v,w) \rangle = x(ku)+2y(kv)+3z(kw) \\ &= \langle (x,y,z),(ku,kv,kw) \rangle = \langle (x,y,z),k(u,v,w) \rangle \\ &\forall\, (x,y,z),(u,v,w) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall\, k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\delta)$
$$\langle (x,y,z),(x,y,z) \rangle = x^2+2y^2+3z^2 \begin{cases} > 0 & \forall\, (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ = 0 & \text{se e solo se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

- Associata al prodotto scalare (1), rispetto alla base $g = \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ di $\mathbb{R}^3$, con $\bar{g}_1 = (1,1,0), \bar{g}_2 = (0,1,1), \bar{g}_3 = (1,0,1)$, è la matrice $C = (c_{ij})$ con $c_{ij} = \langle \bar{g}_i, \bar{g}_j \rangle$, ovvero
$$C = \begin{pmatrix} \langle \bar{g}_1,\bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_1,\bar{g}_2 \rangle & \langle \bar{g}_1,\bar{g}_3 \rangle \\ \langle \bar{g}_2,\bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_2,\bar{g}_2 \rangle & \langle \bar{g}_2,\bar{g}_3 \rangle \\ \langle \bar{g}_3,\bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_3,\bar{g}_2 \rangle & \langle \bar{g}_3,\bar{g}_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Volendo costruire una base ortonormale, rispetto a $\langle , \rangle$, per $S = \mathcal{L}in((1,-1,2),(0,1,-2))$, con il procedimento di Gram-Schmidt si ha

$$
\begin{aligned}
f_1 &= (1,-1,2) \\
f_2 &= (0,1,-2) - \frac{\langle (1,-1,2),(0,1,-2)\rangle}{\langle (1,-1,2),(1,-1,2)\rangle} \cdot (1,-1,2) \\
&= (0,1,-2) - \frac{-14}{15} \cdot (1,-1,2) = \frac{1}{15}(14,1,-2)
\end{aligned}
$$

Dunque $b = (1,-1,2), \left(\frac{14}{15}, \frac{1}{15}, \frac{-2}{15}\right)$ è una base ortogonale per S, dalla quale, tramite le quantità

$$
\begin{aligned}
\|f_1\| &= \sqrt{\langle (1,-1,2),(1,-1,2)\rangle} = \sqrt{15} \\
\|f_2\| &= \sqrt{\langle \left(\frac{14}{15}, \frac{1}{15}, \frac{-2}{15}\right), \left(\frac{14}{15}, \frac{1}{15}, \frac{-2}{15}\right) \rangle} = \frac{\sqrt{210}}{15}
\end{aligned}
$$

si ottiene la base ortonormale $\tilde{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}\right), \left(\frac{14}{\sqrt{210}}, \frac{1}{\sqrt{210}}, \frac{-2}{\sqrt{210}}\right)$.

Esercizio 2.

- L'applicazione

$$
\begin{aligned}
\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\bar{h}, \bar{l} &\longmapsto \langle \bar{h}, \bar{l} \rangle = 2xu + yv
\end{aligned}
\qquad \forall\ \bar{h} = (x,y), \bar{l} = (u,v) \in \mathbb{R}^2. \tag{2}
$$

è un prodotto salare euclideo di $\mathbb{R}^2$; infatti:

α)

$$
\langle (x,y),(u,v)\rangle = \langle (u,v),(x,y)\rangle \ \ \forall\ (x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2.
$$

β)

$$
\begin{aligned}
\langle (x,y),(u,v)+(a,b)\rangle &= \langle (x,y),(u+a,v+b)\rangle \\
&= 2(xu+xa)+yv+yb = 2xu+yv+2xa+yb \\
&= \langle (x,y),(u,v)\rangle + \langle (x,y),(a,b)\rangle \\
&\forall\ (x,y),(u,v),(a,b) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

γ)

$$
\begin{aligned}
\langle k(x,y),(u,v)\rangle &= \langle (kx,ky),(u,v)\rangle = k(2xu+yv) = k\langle (x,y),(u,v)\rangle \\
&= 2x(ku)+(kv) = \langle (x,y),(ku,kv)\rangle \\
&= \langle (x,y),k(u,v)\rangle \qquad \forall\ k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

δ)

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 2x^2+y^2 \begin{cases} >0 & \forall\ (x,y)\neq(0,0) \\ =0 & \text{se e solo se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

- Associata al prodotto scalare (2), rispetto alla base canonica $e=\bar{e}_1,\bar{e}_2$ di $\mathbb{R}^2$, è la matrice $D=(d_{ij})$ con $d_{ij}=\langle\bar{e}_i,\bar{e}_j\rangle$, ovvero

$$D=\begin{pmatrix}\langle\bar{e}_1,\bar{e}_1\rangle & \langle\bar{e}_1,\bar{e}_2\rangle \\ \langle\bar{e}_2,\bar{e}_1\rangle & \langle\bar{e}_2,\bar{e}_2\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Si noti che, rispetto al prodotto scalare (2), $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ sono ortogonali, $\bar{e}_1$ non è un versore, $\bar{e}_2$ è un versore.

- La matrice associata prodotto scalare (2), rispetto alla base $m=\bar{m}_1,\bar{m}_2$ di $\mathbb{R}^2$ con $\bar{m}_1=(1,1),\bar{m}_2=(2,-1)$, è la matrice $R=(r_{ij})$ con $r_{ij}=\langle\bar{m}_i,\bar{m}_j\rangle$, ovvero

$$R=\begin{pmatrix}\langle\bar{m}_1,\bar{m}_1\rangle & \langle\bar{m}_1,\bar{m}_2\rangle \\ \langle\bar{m}_2,\bar{m}_1\rangle & \langle\bar{m}_2,\bar{m}_2\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 9\end{pmatrix}$$

Se

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

è la matrice del cambimento di base dalla base canonica alla base m, si ha anche $R=P^tDP$ ovvero

$$\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$