Esercitazione del 1 aprile 2016

Esercizio 1. Date le rette $r: 2hx + y - 1 = 0$ e $s: x + 2y + k = 0$, determinare i valori dei due parametri reali h e k che rendono le rette rispettivamente:
a) incidenti;
b) parallele non coincidenti;
c) coincidenti.
Svolgimento.
I metodo Il sistema

$$\Sigma: \begin{cases} 2hx + y - 1 = 0 \\ x + 2y + k = 0 \end{cases}$$

è tale che, per $h \neq 0$, si ha

$$\Sigma \xrightarrow{L_2 \longrightarrow 2hL_2 - L_1} \Gamma: \begin{cases} 2hx + y - 1 = 0 \\ \quad (4h-1)y + 2hk + 1 = 0 \end{cases}$$

Risulta:

a) se $4h - 1 \neq 0$, $\exists!$ la soluzione del sistema data da $(x, y) = (\frac{2-k}{4h-1}, -\frac{(2hk+1)}{4h-1})$; le rette, in tal caso, si incontrano in un punto.

b) se $4h - 1 = 0 \wedge 2hk + 1 \neq 0$, il sistema Γ è incompatibile, ovvero le rette sono parallele distinte;

c) se $4h - 1 = 0 \wedge 2hk + 1 = 0$, il sistema Γ si riduce all'equazione $x + 2y - 2 = 0$ che ha soluzioni $(x, y) = (2 - 2y, y), \quad y \in \mathbb{R}$; le rette sono coincidenti.

Per $h = 0$ il sistema Σ diviene $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x + 2y + k = 0 \end{cases}$ che ha soluzioni $(x, y) = (-(k+2), 1), \quad k \in \mathbb{R}$.
II metodo Occorre discutere il sistema

$$\Sigma: \begin{cases} 2hx + y - 1 = 0 \\ x + 2y + k = 0 \end{cases}$$

a) Affinché le due rette siano incidenti, Σ deve avere una unica soluzione, e ciò avviene se

$$\begin{vmatrix} 2h & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ovvero se } h \neq \frac{1}{4}.$$

b) Affinché le due rette siano parallele e distinte, il sistema Σ deve essere incompatibile e ciò avviene se

$$\begin{vmatrix} 2h & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -k \end{vmatrix} \neq 0 \text{ oppure } \begin{vmatrix} 2h & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} 2h & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} \neq 0$$

ovvero se $h = \frac{1}{4} \wedge k \neq -2$; in tal caso, infatti, riguardo ai ranghi delle matrici considerate, si ha $rg(\left(\begin{smallmatrix} 2h & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)) = 1 \neq rg(\left(\begin{smallmatrix} 2h & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -k \end{smallmatrix}\right)) = 2$.
c) Le rette sono coincidenti se e solo se il sistema Σ ammette ∞^1 soluzioni, ovvero se e solo se

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 2h & 1 & -1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix} = 1$$

ovvero se $h = \frac{1}{4} \wedge k = -2$.

Esercizio 2. [A12) di Esercizi e complementi-parte 1]La matrice A ha rango $r = rg(A) = 4$ essendo

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

quindi la forma quadratica Q è non degenere.
Il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda^2)(-\lambda^2 + \lambda + 1) \end{aligned}$$

Dunque $p_A(\lambda) = 0$ se $\lambda = 1 \vee \lambda = -1 \vee \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Quindi, per A, l'indice di positività è $p = 2$, l'indice di negatività è $n = 2$, la segnatura è $(p, r-p) = (2, 2)$. La forma quadratica Q è indefinita, perché gli autovalori sono sia positivi, sia negativi.

L'autospazio di 1, sia esso V_1, è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -t = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ -x - t = 0 \end{cases}$$

ovvero $V_1 = \{y(0, 1, 1, 0),\ y \in \mathbb{R}\}$.

L'autospazio di -1, sia esso V_{-1}, è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - t = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -x + t = 0 \end{cases}$$

ovvero $V_{-1} = \{y(0, 1, -1, 0),\ y \in \mathbb{R}\}$.

L'autospazio di $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, sia esso $V_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} [1 - (\frac{1+\sqrt{5}}{2})]x - t = 0 \\ -(\frac{1+\sqrt{5}}{2})y + z = 0 \\ y - (\frac{1+\sqrt{5}}{2})z = 0 \\ -x - (\frac{1+\sqrt{5}}{2})t = 0 \end{cases}$$

ovvero $V_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \left\{x(1, 0, 0, \frac{1-\sqrt{5}}{2}),\ x \in \mathbb{R}\right\}$.

L'autospazio di $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, sia esso $V_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$, è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} [1-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})]x - t = 0 \\ -(\frac{1-\sqrt{5}}{2})y + z = 0 \\ y - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})z = 0 \\ -x - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})t = 0 \end{cases}$$

ovvero $V_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \left\{ x(1, 0, 0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}),\ x \in \mathbb{R} \right\}$.

Gli autovettori e gli autospazi determinati sono a due a due ortogonali, poiché sono relativi ad autovalori distinti. Una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A è, per esempio, $b = \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4$ con $\bar{b}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \bar{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}}\left(1, 0, 0, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \bar{b}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \bar{b}_4 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}\left(1, 0, 0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Rispetto a tale base la forma quadratica Q assume la forma canonica $Q(X, Y, Z, T) = X^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) Y^2 - Z^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) T^2$.
La forma canonica di Sylvester è $Q(X^*, Y^*, Z^*, T^*) = X^{*2} + Y^{*2} - Z^{*2} - T^{*2}$ e la base di Sylvester corrispondente è $b^* = \bar{b^*}_1, \bar{b^*}_2, \bar{b^*}_3, \bar{b^*}_4$ con $\bar{b^*}_1 = \frac{1}{\sqrt{|1|}}\bar{b}_1, \bar{b^*}_2 = \frac{1}{\sqrt{|\frac{1+\sqrt{5}}{2}|}}\bar{b}_2, \bar{b^*}_3 = \frac{1}{\sqrt{|-1|}}\bar{b}_3, \bar{b^*}_4 = \frac{1}{\sqrt{|\frac{1-\sqrt{5}}{2}|}}\bar{b}_4$ ovvero $\bar{b^*}_1 = \bar{b}_1, \bar{b^*}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}\bar{b}_2, \bar{b^*}_3 = \bar{b}_3, \bar{b^*}_4 = \frac{1}{\sqrt{|\frac{\sqrt{5}-1}{2}|}}\bar{b}_4$.

Esercizio 3. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati la retta $r : -2x + y + 5 = 0$, il punto $B = (3, 1) \in r$ e il punto $A = (-2, 1)$.
Determinare la retta n passante per A e ortogonale ad r.
Svolgimento. La direzione di una retta $t : ax + by + c = 0$ è data dalla coppia $(-b, a)$, quindi r ha come parametri direttori $(-1, -2) = (1, 2)$; una direzione perpendicolare a r è, ad esempio, $(-2, 1)$; dunque l'equazione di n in forma di rapporti uguali è $n : \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{1}$ ovvero $n : x + 2y = 0$.
Alternativamente, si ha $r : y = 2x - 5$; il coefficiente angolare di n, sia esso m, deve essere tale che $2m = -1$, da qui $n : y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 2)$, ovvero $n : y = -\frac{x}{2}$.