Esercitazione del 20 maggio 2016

Esercizio 1. La curva di equazione

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t^2\mathbf{i} + at\mathbf{j} & t \le 0 \\ t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} & t > 0 \end{cases}$$

è regolare su $\mathbb{R}$ per $a = 1$; infatti si ha

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{cases} 2t\mathbf{i} + a\mathbf{j} & t < 0 \\ \mathbf{j} + 2t\mathbf{k} & t > 0 \end{cases}$$

e i limiti

$$\lim_{t\to 0^-} \mathbf{r}'(t) = a\mathbf{j} \qquad \lim_{t\to 0^+} \mathbf{r}'(t) = \mathbf{j}$$

coincidono (ossia $\mathbf{r}$ è derivabile) se e solo se $a = 1$. In questo caso è $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Data la curva di equazione $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$, determinare l'espressione dell'ascissa curvilinea $s(t)$ calcolata a partire dal punto corrispondente al valore $t = 0$ del parametro e riscrivere l'equazione della linea assumendo s come parametro.
Svolgimento. Si ha

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\ du = \int_0^t \sqrt{3}e^u\ du = \sqrt{3}(e^t - 1)$$

La funzione inversa è assegnata dalla formula $t = t(s) = \log(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)$ e quindi

$$\mathbf{r}(s) = (\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)\cos\log(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)\mathbf{i} + (\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)\sin\log(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)\mathbf{j} + (\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)\mathbf{k}$$

Esercizio 3. Scrivere l'equazione del piano osculatore alla curva

$$\mathbf{r}(t) = (2 + \cos t)\sin t\mathbf{i} + (2 + \cos t)\cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k} \qquad t \in [0, \pi]$$

nel punto $t = \frac{\pi}{2}$.
Svolgimento. Data una curva regolare, due volte derivabile, di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, il piano osculatore in un punto $\mathbf{r}(t_0)$, se $\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0) \neq \mathbf{0}$, è individuato dai vettori $\mathbf{r}'(t_0)$ e $\mathbf{r}''(t_0)$. La curva data è due volte derivabile e regolare perché

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (2\cos t + \cos(2t))\mathbf{i} - (2\sin t + \sin(2t))\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k} \\ |\mathbf{r}'(t)|^2 &= 5 + 4\cos t + (\cos t)^2 \ge 1 \end{aligned}$$

e si ha

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}''(t) = -2(\sin t + \sin(2t))\mathbf{i} - 2(\cos t + \cos(2t))\mathbf{j} - \sin t\mathbf{k} \\ &\mathbf{r}(\frac{\pi}{2}) = 2\mathbf{i} + \mathbf{k} \qquad \mathbf{r}'(\frac{\pi}{2}) = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} \qquad \mathbf{r}''(\frac{\pi}{2}) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \end{aligned}$$

L'equazione del piano osculatore è dunque

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2x - y - 6z + 2 = 0$$

Esercizio 4. Scrivere l'equazione del cerchio osculatore $\hat{\mathcal{C}}$ alla curva $f(x) = e^x$ nel punto di ascissa $x = 0$.
Svolgimento. La curvatura richiesta è data da

$$k(0) = \frac{|f''(x)|}{\sqrt{(1 + f'(x)^2)^3}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Il raggio del cerchio osculatore $\hat{\mathcal{C}}$ è, quindi, $\rho(0) = 2\sqrt{2}$.
L'equazione vettoriale della curva è $\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i}+f(x)\mathbf{j}+0\mathbf{k}$; per il calcolo del versore binormale a una curva regolare, due volte derivabile, di equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, se $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \neq \mathbf{0}$, si può utilizzare la formula $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}$; di conseguenza il versore normale principale può essere calcolato come $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$. Per la curva in questione si ha, dunque,

$$\mathbf{B}(0) = \frac{(1, 1, 0) \times (0, 1, 0)}{|(1, 1, 0) \times (0, 1, 0)|} = (0, 0, 1)$$
$$\mathbf{N}(0) = \mathbf{B}(0) \times \mathbf{T}(0) = (0, 0, 1) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$$

mentre il centro del cerchio osculatore è

$$C(0) = \mathbf{r}(0) + \rho(0)\mathbf{N}(0) = (-2, 3, 0)$$

L'equazione del cerchio osculatore è, pertanto,

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$$

Esercizio 5. Data la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{4}{5}\cos s \\ y = 1 - \sin s \\ z = \frac{3}{5}\cos s \end{cases} \qquad\qquad s \in [0, 2\pi]$$

risulta che:

- essa è piana, contenuta nel piano $3x - 4z = 0$, come si vede eliminando s tra la prima e la terza equazione;
- il vettore
$$\frac{\overrightarrow{dP}}{ds} = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}) = \left(-\frac{4}{5}\sin s, -\cos s, -\frac{3}{5}\sin s\right)$$
ha modulo $\left(\frac{16}{25}\sin^2 s + \cos^2 s + \frac{9}{25}\sin^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1$, quindi il parametro s è ascissa curvilinea e risulta $\frac{\overrightarrow{dP}}{ds} = \mathbf{T}$ versore tangente;
- la curvatura $k(s)$ è
$$k(s) = |\frac{\overrightarrow{d\mathbf{T}}}{ds}| = |\left(\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}\right)|$$
$$= |\left(-\frac{4}{5}\cos s, \sin s, -\frac{3}{5}\cos s\right)| = \left(\frac{16}{25}\cos^2 s + \sin^2 s + \frac{9}{25}\cos^2 s\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$
identicamente lungo tutta $\mathcal{C}$.