Esercitazione del 22 aprile 2016

Esercizio 1. Determinare i parametri h e k in modo che le rette $r : \begin{cases} x + ky + 2z - 3 = 0 \\ 2x + y - hz + 1 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ risultino: a) parallele; b) complanari; c)sghembe.

Svolgimento. a) I parametri direttori l, m n di r sono ottenuti dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & -h \end{pmatrix}$ e sono proporzionali a $\left(\begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & -h \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -h \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-hk - 2, 4 + h, 1 - 2k)$; i parametri direttori di s sono proporzionali a $(3, 2, 1)$. Affinché le due rette risultino parallele, deve essere

$$\frac{-hk - 2}{3} = \frac{4 + h}{2} = \frac{1 - 2k}{1} \tag{1}$$

cioè h e k devono essere soluzioni del sistema

$$\begin{cases} hk - 6k + 5 = 0 \\ 2hk + 3h + 16 = 0 \end{cases}$$

da cui l'equazione di secondo grado in k : $4k^2 + 8k - 5 = 0$; da qui $k = \frac{1}{2}$ oppure $k = -\frac{5}{2}$, corrispondentemente $h = -4$ oppure $h = 8$. Si verifica che la coppia $(k, h) = (\frac{1}{2}, -4)$ rende nulli tutti i rapporti (1) (r verrebbe ad avere i tre parametri direttori tutti nulli, cosa priva di senso), quindi i valori che soddisfano il problema sono $(k, h) = (-\frac{5}{2}, 8)$ per cui la retta r ha equazioni $r : \begin{cases} 2x - 5y + 4z - 6 = 0 \\ 2x + y - 8z + 1 = 0 \end{cases}$.

b) Risulta $s : \begin{cases} x - 3z + 1 = 0 \\ y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$. Le due rette sono complanari se

$$D = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -h & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} k & 2 & -3 \\ 1 & -h & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & k & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & -h \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 3hk - 20k - 4h + 42 = 0$$

cioè, ad esempio, se $k = \frac{42-4h}{3h-20}$ con $3h - 20 \neq 0$.
Il determinante D è stato calcolato facendo uso del Teorema di Laplace.
c) sono shembe se $D \neq 0$.

Esercizio 2. Sia r la retta di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + y - 2z + 3 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Trovare equazioni cartesiane per una retta s sghemba con r, con s contenuta nel piano $\pi : x - y - z + 4 = 0$.

Svolgimento. Le equazioni parametriche delle retta incognita s siano $s : \begin{cases} x = p_1 + tl \\ y = p_2 + tm \\ z = p_3 + tn \end{cases}$.

- Una retta di parametri direttori l, m, n e il piano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ sono paralleli se $al + bm + cn = 0$; risulta che s è parallela a π se $l - m - n = 0$ ovvero se $n = l - m$ dunque è $s : \begin{cases} x = p_1 + tl \\ y = p_2 + tm \\ z = p_3 + t(l - m) \end{cases}$

- Risulta che $s \subseteq \pi$ se il punto mobile di s, $S(t) = (p_1 + tl, p_2 + tm, p_3 + t(l - m))$, verifica l'equazione di π, ovvero se $p_1 + tl - p_2 - tm - p_3 - tl + tm + 4 = 0$ relazione verificata, ad esempio, se $(p_1, p_2, p_3) = (-1, 4, -1)$; con tali valori, si ha $s : \begin{cases} x = -1 + tl \\ y = 4 + tm \\ z = -1 + t(l - m) \end{cases}$ ovvero
$$s : \begin{cases} mx - ly + 4l + m = 0 \\ (l - m)x - lz - m = 0 \end{cases} \tag{3}$$

- Dai sistemi (2) e (3) si ottiene che le due rette r e s sono sghembe se
$$\begin{aligned}
\tilde{D} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ m & -l & 0 & 4l + m \\ l - m & 0 & -l & -m \end{vmatrix} \\
&= m(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -l & -m \end{vmatrix} - l(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ l - m & -l & -m \end{vmatrix} + (4l + m)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ l - m & 0 & -l \end{vmatrix} \\
&= 2m^2 + 15ml - 8l^2 \neq 0 \text{ se } m \neq -8l \wedge m \neq \frac{l}{2}
\end{aligned}$$

  Il determinante $\tilde{D}$ è stato calcolato facendo uso del Teorema di Laplace.

Quindi, ad esempio, la retta con direzione $(1, -1, 2)$ verifica i requisiti richiesti e in tal caso si ha $s : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Esercizio 3. Esercizio C4 a),b) dalla pagina Internet
http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/ComplMat1516/esercizi2.html

Si ricorda la condizione di parallelismo retta-piano: una retta di parametri direttori l, m, n e il piano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ sono paralleli se $al + bm + cn = 0$;

La retta $r : \begin{cases} \frac{x}{2} = 2 - y \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{2} \end{cases}$ si scrive $r : \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$; i parametri direttori l, m n di r sono ottenuti dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e sono proporzionali a $\left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-2, 1, -2)$.

La retta $s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; ha parametri direttori l_s, m_s n_s ottenuti dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e sono proporzionali a $\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-0, 0, 1)$.
Per il resto, si rimanda a quanto riportato nella pagina Internet di cui sopra.