Esercitazione del 27 maggio 2016

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x,y) = e^{x+y}\,(1-\sin(x+y)) + \sqrt{1+(x+y)^2}$$

verificare che

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Svolgimento Si noti che $f(x,y) = f(y,x)$ e si applichino le regole di derivazione in una variabile, considerando l'altra come costante.

Esercizio 2. Date le funzioni

$$f_1(x,y) = e^{2x+y}(x^2-x)(y+1)$$

$$f_2(x,y) = \frac{y^2-xy+xy^2-y}{x^2y+x^2-xy-x}$$

determinarne dominii, punti critici, derivate parziali prime e seconde, estremanti.
Svolgimento $f_1(x,y)$ è definita in tutto $\mathbb{R}^2$; poiché risulta $f_1(x,y) = H(x)G(y)$, si ha

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = H'(x)G(y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = H(x)G'(y) \tag{1}$$

Si applichi tale regola al calcolo di tutte le derivate parziali di f_1; si ha

$$\begin{aligned}
f_{1x}(x,y) &= e^{2x}(2x^2-1)e^y(y+1)\\
f_{1y}(x,y) &= e^{2x}(x^2-x)e^y(y+2)\\
f_{1xx}(x,y) &= e^{2x}(4x^2+4x-2)e^y(y+1)\\
f_{1xy}(x,y) &= e^{2x}(2x^2-1)e^y(y+2) = f_{1yx}(x,y)\\
f_{1yy}(x,y) &= e^{2x}(x^2-x)e^y(y+3)
\end{aligned}$$

Risulta

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{sse} \quad \begin{cases} (2x^2-1)(y+1) = 0 \\ \\ (x^2-x)(y+2) = 0 \end{cases}$$

Punti critici di $f_1(x,y)$ sono dunque

- $P_0 = (0,-1)$ punto di sella poiché $\det Hf(P_0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$
- $P_1 = (1,-1)$ punto di sella poiché $\det Hf(P_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 < 0$
- $P_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -2)$ punto di massimo relativo poiché $\det Hf(P_2) = \begin{vmatrix} -2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}-2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}-2} \end{vmatrix} =$ $-(1-\sqrt{2})\sqrt{2}e^{2(\sqrt{2}-2)} > 0$

- $P_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -2)$ punto di minimo relativo poiché $\det Hf(P_3) = \begin{vmatrix} 2\sqrt{2}e^{-(\sqrt{2}+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{-(\sqrt{2}+2)} \end{vmatrix} =$ $(1+\sqrt{2})\sqrt{2}e^{-2(\sqrt{2}+2)} > 0$

avendo indicato con $\det Hf(P)$ il determinante della matrice hessiana calcolata nel punto P.

Si applichi la regola di cui a (1) anche nel caso di $f_2(x,y)$, essendo $f_2(x,y)$ definita se $x \neq 1 \wedge y \neq -1 \wedge x \neq 0$ e $f_2(x,y) = \frac{(x+1)y(y-1)}{x(x-1)(y+1)}$.

Esercizio 3. L'equazione del piano tangente a una superficie di equazione $z = f(x,y)$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, se f è differenziabile in (x_0, y_0), è $z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$; per

$$f(x,y) = \log(\frac{x+2y}{x-3y}) \qquad \text{si ha} \qquad \begin{aligned} f(1,0) &= 0 \\ f_x(1,0) &= 0 \\ f_y(1,0) &= 5 \end{aligned}$$

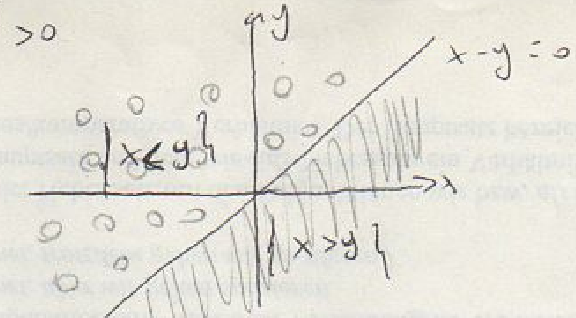
e l'equazione del piano tangente è $z = 5y$.

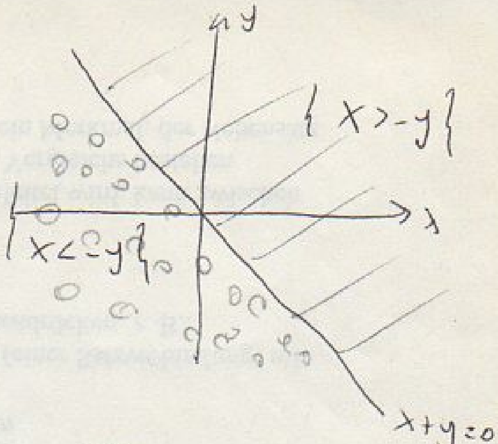
Esercizio 4. Esercizio I1) dalla pagina Internet
http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/ComplMat1516/esercizi7.html

Stabilire se il punto p interno, esterno, di frontiera, di accumulazione per l'insieme E in ognuno dei seguenti casi:
a) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$, $p = (0,0)$.
b) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \cup \{(x,y,z) : x = y = 0\}$, $p = (0,0,1)$.
d) $E = \{(1/n, y) : n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$, $p = (2/3, 1/2)$.

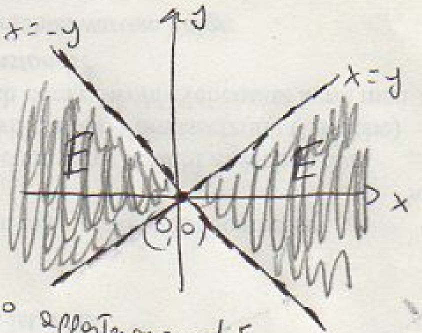
Nelle figure seguenti l'insieme E corrispondente ai vari casi.

a) $x^2 - y^2 > 0$



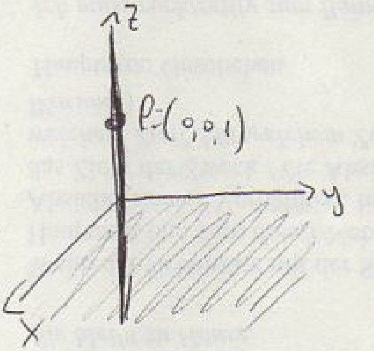


$x^2 - y^2 > 0$ sse $\begin{cases} x-y>0 \\ x+y>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y<0 \\ x+y<0 \end{cases}$



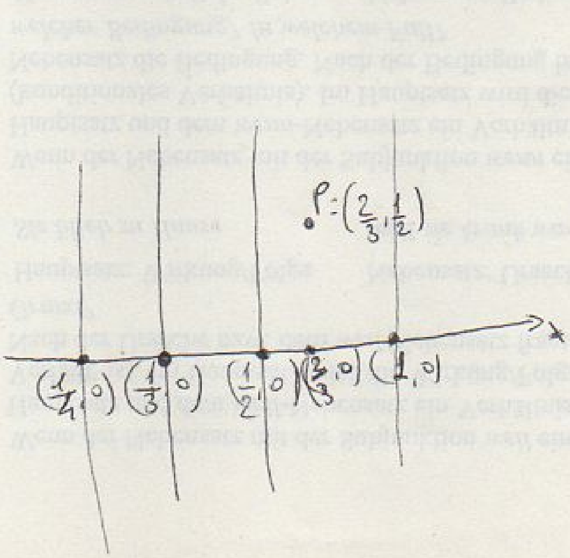
Il punto $P:=(0,0) \notin E$, mentre le due rette $x \pm y = 0$ appartengono ad E

b)



L'insieme E è formato dal piano (x,y) unito all'asse z

d)



L'insieme E è formato da infinite rette parallele all'asse delle y.