Esercitazione del 29 aprile 2016

Esercizio 1. La generica conica della famiglia di coniche

$$\mathcal{C}_k : x^2 + 3xy - ky^2 + 2x - 2 = 0 \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

ha come matrice associata A il cui determinante è $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -k \end{vmatrix} = 3k + \frac{9}{2}$, mentre il determinane della forma quadratica associata è $A_0 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -k \end{vmatrix} = -k - \frac{9}{4}$

- $k \neq -\frac{3}{2}$; si ha
$$\begin{cases} \text{parabola}, & \text{se } k = -\frac{9}{4}, \\ \text{ellisse}, & \text{se } k < -\frac{9}{4}, \\ \text{iperbole}, & \text{se } k > -\frac{9}{4}, \end{cases}$$
- $k = -\frac{3}{2}$; si ha una conica semplicemente degenere, in quanto esistono minori non nulli di ordine due.

Esercizio 2. Siano r e s le rette di equazioni cartesiane rispettive $r : \begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ y - 3z - 3 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} kx + y = 3 \\ 2x - z = d \end{cases}$ Determinare k e d in modo che sia $s \perp r$, $s \subseteq \pi : 11x + y - 5z - 8 = 0$.

Svolgimento. Le equazioni parametriche delle retta r sono $r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 + t \end{cases}$

La retta s ha parametri direttori l_s, m_s n_s ottenuti dalla matrice $\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e sono proporzionali a $\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} k & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-1, k, -2)$, quindi si ha $s \perp r$ se $\langle(-1, k, -2), (1, 3, 1)\rangle = 0$ ovvero se $k = 1$.

Il punto $Q = (0, 3, -d) \in s$, dunque è, ad esempio, $s : \begin{cases} x = -t \\ y = 3 + t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -d - 2t \end{cases}$

Risulta che $s \subseteq \pi$ se il punto mobile di s, $S(t) = (-t, 3 + t, -d - 2t)$, verifica l'equazione di π, ovvero se $-11t + 3 + t + 5d + 10t - 8 = 0$, ovvero se $d = 1$.

Esercizio 3. Verificare che le rette $r : \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 5y + z + 2 = 0 \end{cases}$ sono parallele e determinare l'equazione cartesiana del piano π che le contiene.

Svolgimento. La retta r ha parametri direttori l, m n di r ottenuti dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e sono proporzionali a $\left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = (2, -1, 3)$.

La retta s ha parametri direttori l_s, m_s n_s ottenuti dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e sono proporzionali a $\left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\right) = (2, -1, 3)$.

Per determinare π, si scrive il fascio F di piani di asse r, $F : x-y-z+1+k(2x+y-z+2) = 0$ e si impone il passaggio per un punto arbitrario di s, sia esso il punto $P = (0, 0, -2)$; si ottiene $F_{|P} : 2 + 1 + k(2 + 2) = 0$ da cui $k = -\frac{3}{4}$ quindi $\pi : 2x + 7y + z + 2 = 0$.

Esercizio 4.

Data la conica $\mathcal{C} : x^2 - 6xy + y^2 - \sqrt{2}(x - y) - 6 = 0$, ridurre la sua equazione a forma canonica e riconoscere che $\mathcal{C}$ è un iperbole.
Svolgimento. La forma quadratica della conica, $f_2(x, y) = x^2 - 6xy + y^2$, ha, nella base $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, matrice $A_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Gli autovalori dell'endomorfismo simmetrico F associato ad A_0, nella base B, sono 4, -2; un autovettore relativo a 4 è, per esempio, $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, mentre un autovettore relativo a -2 è, ad esempio, $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Una base ortonormale B' di autovettori di F, equiversa a B, è

$$\mathbf{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

Le formule

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases} \tag{1}$$

sono le equazioni del cambiamento di coordinate dalle coordinate x' y' relative al riferimeno $RC'(O, \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ alle coordinate x, y nel riferimento iniziale avente la stessa origine di RC'.
Sostituendo le (1) nell'equazione della conica $\mathcal{C}$ si trova l'equazione di $\mathcal{C}$ nelle nuove coordinate x' e y':

$$2x'^2 - y'^2 - x' - 3 = 0 \tag{2}$$

Applicando il metodo del completamento dei quadrati, la (2) diviene

$$2(x' - \frac{1}{4})^2 - y'^2 - \frac{25}{8} = 0$$

Si consideri, ora, il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x' = X + \frac{1}{4} \\ y' = Y \end{cases} \tag{3}$$

che fa passare dalle coordinate X, Y nel nuovo riferimento di stessa base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ di RC' e di origine O' di coordinate $x' = \frac{1}{4}$, $y' = 0$, alle coordinate x', y' relative a RC'.
Sostituendo le (3) nell'equazione (2) si ottiene $2X^2 - Y^2 = \frac{25}{8}$ ovvero

$$\frac{X^2}{\frac{25}{16}} - \frac{Y^2}{\frac{25}{8}} = 1$$

che è l'equazione canonica di $\mathcal{C}$, dalla quale si deduce che $\mathcal{C}$ è un iperbole.

Esercizio 5. Esercizio E4-f) dalla pagina Internet
http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/ComplMat1516/esercizi3.html

La conica $\mathcal{C} : X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 - X_1 - X_2 = 0$ è semplicemene degenere perché la matrice ad essa associata, A, ha determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e vi sono in A minori non nulli di ordine due;
è una parabola in quanto la matrice associata alla forma quadratica della conica ha determinante

$$A_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$