Esercitazione del giorno 8 aprile 2016

Esercizio 1. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il punto $A = (2, 1)$ e la retta r di equazione cartesiana $3x + y - 9 = 0$; determinare il punto C simmetrico di A rispetto alla retta r.
Svolgimento. Si determina la proiezione H del punto A sulla retta r. La retta s passante per A e perpendicolare a r ha equazioni parametriche $s : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$. Si ha $H = r \cap s$ e quindi, inserendo le coordinate del punto generico di s nell'equazione di r, si ha $6+9t+1+t-9 = 0$, da cui $t = \frac{1}{5}$. Risulta, quindi, $H = (\frac{13}{5}, \frac{6}{5})$. Il punto $C = (x, y)$ deve essere tale che il punto H è il punto medio del segmento AC, ovvero deve essere $\begin{cases} \frac{13}{5} = \frac{1}{2}(x + 2) \\ \frac{6}{5} = \frac{1}{2}(y + 1) \end{cases}$ Si ottiene perciò $x = \frac{16}{5}$ e $y = \frac{6}{5}$.

Esercizio 2. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano dati i tre punti $P = (4, 3)$, $Q = (1, 2)$ e $R_k = (0, k)$, con k parametro reale.
a) Determinare i valori di k che rendono i tre punti non allineati.
b) Determinare i valori di k che rendono il triangolo PQR_k rettangolo in Q.
Svolgimento. a) Per ogni valore di k i tre punti sono distinti perché hanno ascissa diversa. I punti P, Q e R_k non sono allineati se e solo se i vettori $(4, 3) - (1, 2) = (3, 1)$ e $(0, k) - (1, 2) = (-1, k - 2)$ sono linearmente indipendenti. Ciò avviene se e solo se $k \neq \frac{5}{3}$.
b) Il triangolo PQR_k è rettangolo in Q se e solo se la retta r passante per P e Q è ortogonale alla retta s passante per Q e R_k. La retta r è parallela al vettore $(4, 3) - (1, 2) = (3, 1)$, mentre la retta s è parallela al vettore $(0, k) - (1, 2) = (-1, k - 2)$. La retta r e s sono ortogonali se e solo questi due vettori sono ortogonali cioè se e solo se il loro prodotto scalare $\langle(1, 3), (k - 2, -1)\rangle = k - 5$ si annulla, il che avviene se e solo se $k = 5$.

Esercizio 3. Siano r e s rette di $\mathbb{R}^2$ di equazioni $x_1 - 2x_2 + 8 = 0$ e $3x_1 - x_2 - 1 = 0$ rispettivamente.
(a) Dimostrare che r e s si intersecano in un unico punto $Q \in \mathbb{R}^2$ usando un determinante.
(b) Sia t la retta di equazione $2x_1 + x_2 - 1 = 0$. Trovare le equazioni della retta u parallela a t che passa per Q, di nuovo usando un determinante.
Svolgimento. a) Risulta $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, quindi le due rette si intersecano nel punto $Q = (2, 5)$.
b) Risulta $u : \begin{vmatrix} x_1-2 & x_2-5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ovvero $u : 2x_1 + x_2 - 9 = 0$.

Esercizio 4. La retta r passante per il punto $P = (1, 2, 1)$ parallela ai piani $\pi_1 : x-y+z-1 = 0$ e $\pi_2 : 2x - y + 2z = 0$ è data da $r = \alpha \cap \beta$, dove:
- α è il piano per P e parallelo a π_1
- β è il piano per P e parallelo a π_2.

I fasci di piani paralleli a π_1 e π_2 sono, rispettivamente, $x-y+z+d = 0$ e $2x-y+2z+h = 0$; da essi, imponendo il passaggio per P, si ottiene che $\alpha : x-y+z = 0$ e $\beta : 2x-y+2z-2 = 0$, quindi
$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$