Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2015/2016
Complementi di Matematica (A-K)
Quarto Appello – 2 Febbraio 2017.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Specificare quale esame si deve sostenere: **Geometria** □ **Calcolo II** □

Esercizio 1. Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

definisce un prodotto scalare $\times$ in $\mathbb{R}^3$. Applicando alla base canonica il procedimento di Gram-Schmidt determinare una base ortogonale rispetto a $\times$.

Soluzione: I minori principali sono positivi quindi A è definita positiva. La base cercata è:

$$\{b_1 = e_1 = (1, 0, 0), \quad b_2 = (-1/2, 1, 0), \quad b_3 = (-1/3, -1/3, 1)\}$$

Esercizio 2. Si consideri la conica C_λ di equazione

$$X^2 - \lambda Y^2 - 2\lambda X + 16Y = 0$$

Stabilire a quali valori del parametro reale λ corrispondono ellissi, iperboli, parabole, coniche degeneri. In corrispondenza dei valori di λ per cui la conica è a centro determinare le coordinate del centro di simmetria.

Soluzione: Il discriminante della conica è:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 8 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 8 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 64$$

che ammette l'unico zero reale $\lambda = 4$. Inoltre:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda$$

Quindi:

- per $\lambda = 4$ la conica è semplicemente degenere.
- per $\lambda < 0$ è un'ellisse non degenere.
- per $\lambda > 0$ e $\lambda \neq 4$ è un'iperbole non degenere.
- per $\lambda = 0$ è una parabola non degenere.

Centro $C = (\lambda, 8/\lambda)$.

Esercizio 3. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(X,Y,Z) = -X^2 - Y^2 - Z^2 + 2XY + 2XZ + 2YZ$$

a) classificare q e determinarne la segnatura. b) trovare una base ortonormale rispetto alla quale q sia diagonalizzata. c) calcolarne l'espressione in tale base. d) Determinare una base di Sylvester e la forma canonica di Sylvester.

Soluzione: La matrice della forma bilineare è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ed il suo polinomio caratteristico è $P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$, e quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Pertanto q è non degenere, indefinita con segnatura $(1,2)$.

L'autospazio V_1 è generato dal vettore $v_1 = (1,1,1)$, che normalizzato diventa $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

L'autospazio V_{-2} ha equazione $X + Y + Z = 0$. Una sua base è evidentemente data da $\{v_2 = (1,-1,0),\ v_3 = (0,1,-1)\}$. Applicando Gram-Schmidt si ottiene la coppia di vettori ortogonali tra loro:

$$w_2 = v_2,\ w_3 = (1/2, 1/2, -1)$$

i quali, normalizzati, danno la base ortonormale

$$\left\{u_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), u_3 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -\sqrt{2/3})\right\}$$

di V_{-2}.

Quindi una base ortonormale che diagonalizza q è $\{u_1, u_2, u_3\}$ e in tale base l'espressione di q è:

$$q(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_3^2$$

La corrispondente base di Sylvester è

$$\left\{u_1, \frac{u_2}{\sqrt{2}}, \frac{u_3}{\sqrt{2}}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

e la forma canonica di Sylvester è $X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$.

Esercizio 4. Si consideri la curva differenziabile in $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Si determini il più grande intervallo contenente il punto $t = 1$ nel quale α è regolare motivando la risposta. Inoltre si calcolino:

b) equazione del piano osculatore in tutti i punti della curva.

c) triedro di Frenet, curvatura e centro di curvatura nel punto $\alpha(1)$.

Soluzione: a) La curva è di classe C^∞, ma il vettore velocità si annulla se e solo se $t = 0$. Quindi l'intervallo cercato è $(0, +\infty)$.

b) $-(X - \frac{t^4}{4}) + 2t(Y - \frac{t^3}{3}) - t^2(Z - \frac{t^2}{2}) = 0$

c) $\alpha' = (t^3, t^2, t)$, $\alpha'' = (3t^2, 2t, 1)$, $\alpha' \wedge \alpha'' = (-t^2, 2t^3, -t^4)$,

$(\alpha' \wedge \alpha'')(1) = (-1, 2, -1)$, $||(\alpha' \wedge \alpha'')(1)|| = \sqrt{6}$, $v(1) = \sqrt{3}$, $\kappa(1) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$, $C(1) = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{3}, -1\right)$.

Esercizio 5. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$ty'(t) + y(t) = e^t$$

e determinarne la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = e$ indicandone l'intervallo di definizione.

Soluzione: Soluzione equazione omogenea: $y = \frac{C}{t}$, $C \in \mathbb{R}$.
Soluzione generale: $y(t) = \frac{C+e^t}{t}$.
Soluzione particolare: $y(t) = \frac{e^t}{t}$. Intervallo $(0, +\infty)$.

Esercizio 6. Calcolare l'integrale doppio:

$$\iint_Q \frac{y}{1+xy} dxdy$$

dove Q è il quadrato definito dalle limitazioni:

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$$

Soluzione: $2 \log 2 - 1$.

Esercizio 7. Determinare i punti critici della funzione:

$$f(X,Y) = \frac{8}{X} + \frac{X}{Y} + Y, \quad X > 0, Y > 0$$

e classificarli.

Soluzione Si ha:

$$f_X = -\frac{8}{X^2} + \frac{1}{Y}, \quad f_Y = -\frac{X}{Y^2} + 1$$

che si annullano in $P = (4,2)$, il quale quindi è l'unico punto critico. Essendo

$$f_{XX} = \frac{16}{X^3}, \quad f_{XY} = -\frac{1}{Y^2}, \quad f_{YY} = \frac{2X}{Y^3}$$

si ha:

$$H(4,2) = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva. Quindi P è un minimo relativo.